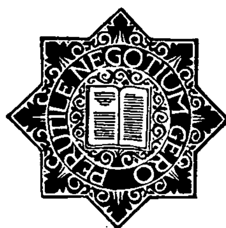
BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

1e JAARGANG 1924/25, Nr. 2



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Dr. D. J. E. SCHREK, Het cultuurhistorisch element in het wiskunde-onderwijs *(vervolg)*. . . . . . . 33—46
T. EHRENFEST—AFANASSJEWA, Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden? . . . . 47—59
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Antwoord aan Mevrouw EHRENFEST—AFANASSJEWA . . . . 60—68
Boekbesprekingen . . . . 69—80

De „Meraner Vorschläge" hebben een onmiskenbaren invloed uitgeoefend op de officieele voorschriften in verschillende Duitsche staten. Inzonderheid denk ik hier aan het leerplan voor Wurttemberg (1912), dat voor de hoogste klasse van het gymnasium voorschrijft: „Geschichtliche und philosophische Gesichtspunkte", terwijl de methodische toelichting zegt: „Durch den ganzen Unterricht sollen sich geeignete Mitteilungen aus der Geschichte der mathematischen Wissenschaften und über die Entwicklung einzelner wichtiger Probleme hindurchziehen, die dem Alter der Schüler und dem Stand der Klasse angepasst sind." Dat de invloed van het Meraner Leerplan nog steeds groot is kan blijken uit de omstandigheid, dat de ministerieele voorschriften van dit jaar (1924) betreffende het leerplan der Deutsche Oberschule en der Aufbauschule (twee nieuwe typen van middelbare scholen, die als uitvloeisel van de staatkundige gebeurtenissen in Pruisen zijn gesticht) zich nauw aan de herziene voorstellen van den D.A.M.N.U. aansluiten, zoozeer zelfs, dat de zooeven aangehaalde passage er bijna woordelijk in is overgenomen [1]).

Overigens meene men niet, dat het steeds duidelijker uitgesproken verlangen, dat in het wiskunde-onderwijs de samenhang met de algemeene cultuur meer dan tot dusver in het oog gehouden worde, alleen in Duitschland leeft. In een rapport: „On the teaching of Mathematics in Public and Secondary Schools", dat de Engelsche Mathematical Association in 1919 publiceerde, wordt in de 16e stelling aanbevolen: „That portaits of the great mathematicians should be hung in the mathematical class-rooms, and that reference to their lives and investigations should frequently be made by the teacher in his lessons, some explanation being given of the effect of mathematical discoveries on the progress of civilisation" [2]). En op een andere plaats in hetzelfde rapport wordt gezegd: „The historical aspect of Mathematics has never yet found its fitting place in the teaching of the schools. What one may call the Wives-of-Henry-the-Eighth type of History is gradually being abandoned,

---

1) Men zie een bericht hierover van Dr. W. Lietzmann in de Zeitschr. f. mathem. u. naturwiss. Unterricht. 55 Jahrg. 1924, blz. 164.

2) In „The Mathematical Gazette", het orgaan der Association, is dit rapport opgenomen (Vol. IX, No. 143, December 1919). De aflevering is afzonderlijk verkrijgbaar (Uitgever G. Bell & Sons, London). Zie t.a.p., bl. 394.

and the development of the human race in its social, intellectual and national aspects is taking its place. The development of the great mathematical discoveries might find a fitting place in such a historical scheme" [1]).

Het geschiedkundig element in de schoolboeken. We willen thans nagaan in hoever de schrijvers van leerboeken voor de school rekening hebben gehouden met de geschiedenis der wiskunde. Blijven we daarbij voorloopig binnen de grenzen van ons land, dan moeten we in de eerste plaats de werken van wijlen J. VERSLUYS noemen, die een kwart eeuw geleden zeer veel werden gebruikt. Ze zijn thans in het fonds van den heer P. NOORDHOFF te Groningen overgegaan en door den heer P. WIJDENES e. a. opnieuw bewerkt. Den heer VERSLUYS komt ongetwijfeld de eer toe van een open oog te hebben gehad voor de geschiedenis van zijn vak. Vinden we reeds in zijn werken over algebra en meetkunde hier en daar aanteekeningen (over de logarithmen, over het getal π), nog meer treden deze op den voorgrond in zijn werken over driehoeksmeting. Ja, in zijn Vlakke Driehoeksmeting treffen we zelfs een afzonderlijk geschiedkundig overzicht aan van twee bladzijden druks, dat als aanhangsel aan het werk is toegevoegd.

Eén nog meer harmonisch geheel geeft het werk van den heer W. REINDERSMA [2]). Hier komt de wiskunde als deel van onze cultuur wel het best tot haar recht; hier is het ideaal, dat ik me denk, wel het dichtst benaderd. In het prospectus, dat het leerboek vergezelt, geeft de schrijver rekenschap van zijn wijze van handelen. Hij merkt op, dat het natuurlijk niet de bedoeling is de historische opmerkingen als huiswerk op te geven, doch dat ze voor den belangstellenden leerling bestemd zijn. Dit is ook m.i. de juiste opvatting. „Zeer zeker", zegt de schrijver verder, „is het voor het verstaan der moderne cultuur van veêl belang, dat onze kinderen iets weten van de ontwikkelingsgeschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen, dat ze de beteekenis gevoelen van genieën als COPERNICUS, KEPLER, GALILEI, HUYGENS, NEWTON [3]). Ook hoort het kind gaarne

---

[1]) t.a.p., bl. 408.

[2]) W. Reindersma. Nieuw Leerboek der Vlakke Meetkunde I—III. Groningen, Wolters.

[3]) We meenen intusschen te moeten betwijfelen of het gestelde doel door den heer Reindersma in zijn leerboek wel is bereikt.

(Noot van de Redactie).

iets omtrent de historie der dingen, waarmee het dagelijks werkt." De laatste opmerking kan ik uit ervaring ten volle onderschrijven.

Het zou te veel ruimte vergen, als ik wilde uiteenzetten hoe de heer REINDERSMA zijn taak heeft opgevat; ieder moge dit voor zichzelf nagaan. Meermalen geeft een noot slechts een enkelen naam met jaartallen en een korte aanduiding; soms geven korte stukken tekst, met kleiner letter gedrukt, iets uitvoeriger inlichting, b.v. over PTOLEMAEUS, de verdeeling in uiterste en middelste reden, e. d.. Aan de quadratuur van den cirkel alleen worden vier bladzijden gewijd, terwijl het werk besluit met een hoofdstuk van niet minder dan 20 bladzijden: „Uit de geschiedenis der Vlakke Meetkunde."

Met de werken van VERSLUYS en REINDERSMA is voor Nederland vrijwel alles gezegd; alle overige mij bekende leerboeken geven niets of zeer weinig.

Wenden we ons daarom thans tot het buitenland. Neemt men in aanmerking, dat mij uit den aard der zaak slechts betrekkelijk weinig vreemde schoolboeken bekend zijn en dat daaronder niettemin een grooter aantal voorkomt met geschiedkundige aanteekeningen dan onder de Nederlandsche, dan krijgt men toch wel den indruk, dat in andere landen de toestand veel en veel gunstiger is dan bij ons.

Ik wil een drietal werkjes als typische vertegenwoordigers van hun soort bespreken en kies als zoodanig voor Duitschland het bekende vraagstukkenboek van HEIS [1]). Tientallen van jaren heeft het in Duitschland de alleenheerschappij gevoerd [2]) en in Hollandsche vertaling zal het den ouderen onder ons nog uit hun eigen

---

[1]) Dr. Eduard Heis. Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Dit werk verscheen voor het eerst te Keulen in 1837. In mijn bezit is de 112—113 Auflage van 1918 (Köln. Du Mont-Schauberg'sche Buchhandlung).

[2]) In latere jaren, toen het werk mededingers op de boekenmarkt kreeg, verdedigde men schertsend het oude leerboek met een aanhaling uit de Ilias: *οὐκ ἀγαθὸν πολυκοιρανίη· εἷς κοίρανος ἔστω, εἷς βασιλεὺς* (Ilias B 204): „Een heerschappij van velen tegelijk is niet iets goeds; één moet heerscher zijn, één koning." De woordspeling gaat bij de vertaling verloren.

schooljaren bekend zijn [1]). Een groot aantal noten onder aan de bladzijde, meestal zeer kort, licht den gebruiker in over de voornaamste historische bijzonderheden, zoo over het opstellen van de formule voor den Paaschdatum door GAUSS, de uitvinding van den nonius, de tiendeelige breuken, de logarithmen, enz.. In de Nederlandsche bewerking heeft men deze aanteekeningen geheel of nagenoeg geheel weggelaten.

Geheel anders is het beroemde boekje van JULES TANNERY [2]) ingericht. De „Notions historiques", waarvan de titel spreekt, heeft op 's schrijvers verzoek zijn broeder PAUL, de geleerde historicus, ervoor geschreven. Ze beslaan een 25-tal bladzijden en behandelen eenige afzonderlijke kwesties, zooals „Origines de l'Algèbre", „Sur les courbes étudiées par les anciens", enz..

Een derde, weer geheel ander type vertegenwoordigt het aantrekkelijke Zweedsche werkje van MATTSON [3]). In den tekst vindt men hier tal van, meest korte, historische opmerkingen. STIFEL, EULER, PASCAL, DESCARTES, om slechts enkelen te noemen, worden erin vermeld. Van den laatste is een portret opgenomen, evenals van GAUSS en van den grooten, jong gestorven Noor NIELS HENRIK ABEL. Maar dit is nog niet alles. Aan het einde van het derde deeltje is een hoofdstuk opgenomen, waarin de talstelsels en cijferteekens, alsmede de teekens voor de algebraïsche bewerkingen in hun historische ontwikkeling worden besproken. Een lijstje met voorbeelden doet zien hoe geheel anders dan thans een vergelijking er uitzag bij CARDANUS, STEVIN, VIETA, e. a..

Stof en wijze van behandeling. Wanneer men de vraag stelt: wat kan nu de leeraar in de hier gewenschte richting doen?, dan is het eerste en voornaamste antwoord: dat hij overal, waar er aanleiding toe bestaat, kan wijzen op de persoon, van wie, en den tijd, uit welken een bepaald probleem afkomstig is; vooral, dat hij

---

[1]) Verzameling van Algebraïsche Vraagstukken. Vrij bewerkt naar het Hoogduitsch van Dr. Eduard Heis door Dr. D. van Lankeren Matthes en J. W. Tesch. In mijn bezit is o.a. de 5e druk van 1892 (Haarlem. Erven Bohn).

[2]) Jules Tannery. Notions de Mathématiques. Avec Notions Historiques par Paul Tannery. Paris. Delagrave.

[3]) R. Mattson. Lärobok i Algebra för Gymnasiet. I—III. Stockholm. Norstedt & Söner.

op het verband wijst met de staatkundige geschiedenis en soms dat hij opmerkzaam maakt op de cultuurhistorische beteekenis. De gelegenheid hiertoe is veel vaker aanwezig dan men veelal meent. Zoo zal men bij de gelijkvormigheid van driehoeken vertellen hoe reeds THALES VAN MILETE tot groote verbazing van koning AMASIS de hoogte van de Pyramiden wist te berekenen door de lengte van hun schaduw te vergelijken met die van een in den grond gestoken stok. Bij PYTHAGORAS zal men iets van dezen grooten wijsgeer en zijn school te Croton meedeelen en er de aandacht op vestigen, hoe reeds vele eeuwen vroeger aan de Egyptische landmeters (harpedonapten, „touwspanners”) bekend was dat, omgekeerd, een driehoek met zijden 3, 4 en 5 rechthoekig is; van deze eigenschap toch maakten, naar een papyrus te Berlijn ons leert, de tempelbouwers reeds omstreeks 2000 v. Chr. (12e dynastie) gebruik [1].

Meermalen zal de leeraar verder wijzen op de grootste drie wiskundigen der oudheid: EUCLIDES VAN ALEXANDRIE, APOLLONIUS VAN PERGE en ARCHIMEDES VAN SYRACUSE; hij zal hun namen met eenige jaartallen op het bord schrijven, opmerken hoe hun leven en werken in den Hellenistischen tijd valt en hoe dus de wiskundige wetenschap bij de Grieken tot bloei kwam in den tijd, toen het met hun staatkundige grootheid gedaan was. Bij de stelling van PTOLEMAEUS zal diens Almagest en het geocentrische wereldstelsel worden genoemd en bij de *s*-formule zal iets van HERON en diens technische vindingen worden vermeld. Bij de verklaring van het woord „algebra” zal de leeraar iets vertellen van het bloeitijdperk van de wetenschap der Arabieren en inzonderheid van MOHAMMED IBN MUSA ALCHWARIZMI, wiens werk „Algabr walmukabalah” de geheele stelkunde haar naam heeft gegeven [2]. In den nieuweren tijd zal men FRANÇOIS VIÈTE [3], den grondlegger der moderne algebra, niet mogen overslaan, bij de logarithmen verhalen hoe het

---

[1]) Vgl. het straks nog uitvoeriger te bespreken werk van Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik IV, bl. 139.

[2]) Tropfke, t.a.p. II, bl. 48—54. In latere jaren heeft Vieta getracht het woord algebra, dat hij barbaarsch vond, te vervangen door „Ars analytica” (vgl. zijn werk: In artem analyticam isagoge 1591), doch zonder resultaat.

[3]) Ten onrechte zegt Gebhardt (t.a.p., bl. 95): „Vieta war Arzt”. Vieta was staatsambtenaar („maître de requêtes”) onder Hendrik III.

beginsel van het logarithmisch rekenen reeds bij STIFEL in diens Arithmetica integra (1544) voorkomt en hoe door BÜRGI, NAPIER en BRIGGS hierop is voortgebouwd. Bij de verdeeling in uiterste en middelste reden zal men alle aanleiding hebben om te spreken over de beteekenis dezer verhouding in de aesthetica, alsmede over de mystieke beteekenis van het pentagram, de figuur, die reeds de Pythagoreërs trof en die nog in GOETHE'S Faust een rol speelt.

Met deze enkele voorbeelden kan ik volstaan, want men ziet reeds: de stof ligt voor het grijpen. Men begrijpe mij intusschen wel: ik zou niet willen, dat men dit alles den leerlingen als huiswerk opgaf en zoo nog tot de reeds veel besproken overlading zou meewerken. Maar wie de proef neemt zal spoedig bemerken, dat de kinderen uit eigen beweging deze dingen opteekenen en er belangstelling voor gevoelen. Ik herinner mij nog de verbaasde gezichten in een tweede klasse, toen ik eens terloops vertelde, dat b.v. het congruentie-kenmerk van twee zijden en den ingesloten hoek reeds bijna letterlijk zooals wij het leeren voorkomt in de Elementen van EUCLIDES. Dat hadden ze nooit vermoed! Het is mijn vaste overtuiging dat men door een behandeling als ik hier aangaf de geestelijke vorming der leerlingen meer dient dan door het maken van enkele vraagstukken meer.

Naast dit eerste en voornaamste punt valt nog te wijzen op een tweede, al is dat van niet zoo groot belang: het behandelen van bekende vraagstukken uit vroeger eeuwen. Deze bestaan in groot aantal. Bij PROCLUS zoowel als bij LEONARDO DA VINCI, in HERON'S Dioptra en in DÜRER'S Underweysung der messung vindt men opgaven, die zich aansluiten bij de tegenwoordige leerstof. Het meest komen deze tot hun recht in de uitstekende werkjes van LIETZMANN [1]), waar telkens een reeks vraagstukken „Aus der Geschichte der Geometrie" of een hoofdstukje „Aufgaben aus alter Zeit" is ingelascht.

In het bijzonder vermeld ik hier nog de verzameling van Grieksche epigrammen, die door den Griekschen monnik MAXIMUS PLANUDES

---

[1]) B.v. Bardey-Lietzmann. Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. Reformausgabe A: für Gymnasien. Unterstufe und Oberstufe. Leipzig. Teubner.

omstreeks 1300 is bijeengebracht[1]). Ze komen in Duitsche schoolboeken meermalen voor, o.a. in HEIS[2]); in de Nederlandsche bewerking hiervan zijn ze in de latere uitgaven weggelaten.

Als voorbeeld laat ik het bekende Grafschrift van DIOPHANTUS volgen[3]):

Hier dekt een steen Diophantus — een wonder t' aanschouwen —
Met d'Arithmetica wordt door dien steen ons zijn leeftijd ontvouwd.
't Zesde zijns levens verliep, wijl hij nog een zorglooze knaap was;
Voeg nog een twaalfde erbij, toen vertoonde zich dons op zijn wang;
Nauw nog een zevende erbij, toen ontstak voor hem Hymen de bruidstoorts,
En vijf jaren daarna schonk hij een zoon hem als pand.
Wee U, noodlottig geschenk, zoo geliefd! Nauw had hij de helft van
's Vaders jaren bereikt, toen de vreeslijke Hades hem opnam.
Nadat hij nog vier jaren lang in de kunde der schoone getallen
Troost had gezocht voor zijn smart, roofde ook hemzelven de dood.

Het merkwaardige van dit vraagstuk is nog dat het twee opvattingen toelaat: Is de zoon half zoo oud geworden als de vader *ten slotte* werd, dan bereikte DIOPHANTUS den leeftijd van 84 jaren. Was echter de zoon bij zijn overlijden half zoo oud als de vader *op dat oogenblik* — en zoo is het waarschijnlijk bedoeld — dan is DIOPHANTUS $65^1/_3$ jaar oud geworden.

De wiskundige geschriften der Oudheid in de oorspronkelijke taal.

Naast alles wat tot dusver besproken is en op alle scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs betrekking heeft is voor de gymnasia nog de vraag van belang in hoeverre men de leerlingen van den oorspronkelijken tekst van definities en stellingen (uit den aard der zaak in hoofdzaak Grieksch) kan laten kennis nemen.

Het is een verblijdend feit dat op dit punt niet alleen van de zijde der mathematici[4]), maar ook van die der classici belangstelling wordt getoond. Met name is het de Duitsche geleerde MAX C. P. SCHMIDT geweest, die geijverd heeft voor het brengen van dit deel

---

[1]) Gebhardt (t.a.p., bl. 32 noot) geeft een enkele in den oorspronkelijken tekst.

[2]) Heis (Duitsche uitgave) t.a.p., bl. 150—151.

[3]) Heis (Nederlandsche uitgave) t.a.p., bl. 89 no. 41.

[4]) B.v. Gebhardt t.a.p., bl. 129. Ook: Lietzmann. Methodik des mathematischen Unterrichts (Leipzig. Quelle & Meyer), I, bl. 75—76.

der antieke cultuur in de school. Hier te lande heeft Prof. Dr. H. BOLKESTEIN, destijds leeraar aan het Haagsche gymnasium, ervoor gepleit [1]).

„Wer klassisch genug gebildet ist", zegt MAX SIMON ergens [2]), „kann im Gymnasium des ARCHIMEDES *κύκλου μέτρησις* im Original lesen lassen". Ja, „wer klassisch genug gebildet ist"; het valt evenwel te betwijfelen of vele collega's, ook van hen, die een klassieke opleiding genoten hebben, een dergelijke taak zouden aandurven. Bovendien: hoe zou men er den benoodigden tijd voor kunnen vinden? Men kan intusschen zijn eischen heel wat lager stellen en toch wel iets bereiken, naar mij bij ondervinding is gebleken. Een enkele maal kan men bij een onderwerp, dat zich daartoe leent, de een of andere definitie of stelling uit de *Στοιχεῖα* van EUCLIDES op het bord schrijven met eenige nadere verklaring. Zelf heb ik dit eens beproefd met de stelling van PYTHAGORAS in een tweede klasse, ook wel, in hoogere klassen, met de stelling van THALES („een hoek in een halven cirkel is recht") en met allerlei definities (cirkelsegment en -sector, verdeeling in uiterste en middelste reden, enz.). Ook de stelling van PTOLEMAEUS uit de Almagest bleek geschikt. In al deze gevallen was het resultaat zeer bevredigend: de taal van EUCLIDES is eenvoudig en duidelijk en levert, met eenige toelichting, in het einde der tweede klasse geen bezwaar op. Mijn indruk was, dat het de leerlingen bijzonder interesseerde.

Ook kan men opmerkzaam maken op het stereotiepe *λέγω ὅτι* (ik beweer dat......, dus ons: „te bewijzen") en het *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* („hetgeen te bewijzen was") der bewijzen van EUCLIDES. Men kan een woord als *ὑποτείνουσα* verklaren, dat bij de Grieken volstrekt niet altijd een zijde tegenover een *rechten* hoek aanduidt, zoodat EUCLIDES dan ook steeds voluit spreekt van *ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα*(de zijde, die den rechten hoek onderspant), als hij hypotenusa in onze tegenwoordige beteekenis bedoelt [3]). En ongetwijfeld interesseert het de leerlingen dat EUCLIDES reeds, letter-

---

[1]) De klassieke oudheid in het gymnasiaal onderwijs. Rapport, samengesteld in opdracht van het Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën. Leiden. Sijthoff. 1916, bl. 179—180.

[2]) Max Simon. Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. München. Beck. 1908, bl. 170.

[3]) Tropfke, t.a.p. IV, bl. 63.

lijk als wij, spreekt van het verdeelen in uiterste en middelste reden[1]) (ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνειν). Zoo is er veel meer.

Vraagt men nu: waar kan de leeraar deze oorspronkelijke teksten vinden? dan moet in de eerste plaats worden opgemerkt, dat het straks nog nader te bespreken werk van TROPFKE in de noten vele stellingen volledig aanhaalt. Verder bevat het tweede deel van het leesboek van VON WILAMOWITZ—MOELLENDORFF[2]) een 35-tal bladzijden, die aan de exacte wetenschappen zijn gewijd; het werk geeft stukken uit de Elementen van EUCLIDES, de Zandrekening van ARCHIMEDES en eenige uitvindingen van HERON. Soortgelijke lectuur komt ook in andere Grieksche leesboeken voor[3]).

Belangrijker is de bloemlezing van SCHMIDT[4]). Van de drie deeltjes is het eerste, „das Buch der Grössen", aan de wiskunde gewijd; het geeft veel uit EUCLIDES en o.a. ook de stelling van PTOLEMAEUS uit de Almagest. Dit deeltje is helaas uitverkocht en ook antiquarisch moeilijk te krijgen. Deel II, „das Buch von Himmel und Erde", behandelt de sterrekundige en geographische ontdekkingen der ouden en bevat o.a. de bekende meting van den aardmeridiaan door ERATOSTHENES, terwijl in Deel III, „das Buch der Erfindungen", de technische vindingen der Grieken en Romeinen een plaats krijgen. Dat hier vooral stukken uit de geschriften van ARCHIMEDES en HERON zijn opgenomen zal duidelijk zijn. Ook bevat het werk berichten van geschiedschrijvers over het leven en werken der oude wiskundigen, zoo de beschrijving van de verdediging van Syracuse door ARCHIMEDES volgens POLYBIUS, LIVIUS en PLUTARCHUS, alsmede het korte, levendige verhaal van CICERO over het ontdekken van het graf van ARCHIMEDES. Vergeten mag niet worden, dat elk deeltje een uitvoerige en zeer goed orienteerende inleiding bevat en dat talrijke noten aan den voet van de bladzijde den gebruiker de lectuur vergemakkelijken.

Behalve deze bloemlezing schreef SCHMIDT ook nog een werk

---

[1]) Tropfke, t.a.p. IV, bl. 185.

[2]) von Wilamowitz—Moellendorff. Griechisches Lesebuch. Zweiter Band (mit Erläuterungsheft). Berlin, Weidmann.

[3]) B.v. in E. Reichelt, Griechisches Lesebuch für die V und VI Klasse Oesterreichischer Gymnasien. Wien. Tempsky.

[4]) Max C. P. Schmidt. Realistische Chrestomathie aus der Literatur des klassischen Altertums, in drei Büchern. Leipzig. Dürr. 1900—1901.

over de wiskundige terminologie bij de Grieken [1]). Hoewel het volgens SCHMIDT zelf „philologischen, nicht mathematischen Charakters" is, bevat het ook voor den wiskundige menige interessante bijzonderheid. Behalve uitvoerige opstellen over THALES, PYTHAGORAS en EUCLIDES en een groot aantal woordverklaringen geeft het een 65-tal bladzijden teksten, waaronder vooral de ὅροι (definities) van EUCLIDES de aandacht trekken. Zoo kan dit werk eenigszins het uitverkochte eerste deel der Chrestomathie vervangen.

Literatuur. In GEBHARDT'S verhandeling komt o.a. ook een paragraaf voor met het opschrift: Wo findet der Lehrer für sich und den mathematischen Unterricht geschichtliche Belehrung und Anregung? Ik zou hier dezelfde vraag aan de orde willen stellen; met de beantwoording daarvan — voor zoover ik althans daartoe in staat ben — hoop ik sommige jongere collega's een dienst te bewijzen, en al zal ik zeker niet volledig zijn, toch kan ik misschien de aandacht vestigen op enkele minder bekende werken, die ik bij ervaring als goed heb leeren kennen.

In onze taal bestaat voor zoover ik weet slechts één werk over de geschiedenis der wiskunde, n.l. dat van VERSLUYS [2]), dat in ongeveer 200 bladzijden de hoofdpunten uit deze geschiedenis meedeelt. Het werk, dat blijkbaar weinig bekend is, — het werd na de eerste uitgave in 1902 niet herdrukt — is als eerste inleiding zeer geschikt. De schrijver, die, naar hij meedeelt, vooral uit het standaardwerk van CANTOR heeft geput, doch ook tal van andere werken heeft geraadpleegd, schenkt bijzondere aandacht aan de Nederlandsche wiskundigen (SNELLIUS, VAN SCHOOTEN, HUYGENS, DE WITT, HUDDE, VAN HEURAET, VAN SWINDEN, e. a.), wat een voordeel is te achten. Een goede eigenschap is ook de overzichtelijkheid van het werk, waardoor men zich spoedig kan orienteeren, als men over een bepaald persoon of een bepaald tijdvak iets wil naslaan.

Nog beknopter, maar ook zeer bruikbaar is een werkje van den

---

[1]) Max C. P. Schmidt. Kulturhistorische Beiträge zur Kenntniss des griechischen und römischen Altertums. Erstes Heft: Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik. Leipzig. Dürr. 1914.

[2]) J. Versluys. Beknopte geschiedenis der Wiskunde. Amsterdam. A. Versluys, 1902 (thans overgegaan in het fonds van den heer P. Noordhoff te Groningen).

geleerden historicus H. WIELEITNER in de bekende Sammlung Göschen, dat veel geeft in een kort bestek[1]).

Bijzonder aantrekkelijk is het Fransche werkje van BOYER[2]). Ook dit is weinig omvangrijk en daarbij prettig geschreven; het onderscheidt zich van de meeste andere soortgelijke werken door een aantal facsimile's en portretten. Zoo zien we een gedeelte van een handschrift van de Elementen van EUCLIDES afgebeeld en het titelblad van de Acta Eruditorum, het door LEIBNIZ gestichte eerste wetenschappelijke tijdschrift van Duitschland. Onder de 19 portretten, die het boek versieren en waarvan, naar de schrijver ons verzekert, de echtheid zorgvuldig gecontroleerd is, trekken de aandacht die van DESCARTES, VIETA, LEIBNIZ, MONGE, EULER, PASCAL, NAPIER, NEWTON en dat van de beroemde vrouwelijke wiskundige der 19e eeuw SONJA KOWALEWSKI. Weer iets uitvoeriger dan het genoemde is het gunstig beoordeelde boek van ROUSE BALL, alsmede een tweetal werken van CAJORI[3]).

Het midden tusschen de kleinere werken als de hier genoemde en een standaardwerk als dat van MORITZ CANTOR[4]) houdt een Geschiedenis der Wiskunde, die in de bekende Sammlung Schubert verschenen is[5]).

---

1) H. Wieleitner. Geschichte der Mathematik (in twee deeltjes: Sammlung Göschen no. 226 en 875). Berlin. Walter de Gruyter & Co.

2) Jacques Boyer. Histoire des Mathématiques. Paris. Gauthier-Villars.

3) W. W. Rouse Ball. A short account of the History of Mathematics.

Fl. Cajori. History of Mathematics.

Fl. Cajori. A History of Elementary Mathematics.

(alle verschenen bij Macmillan & Co. London).

4) Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. Teubner. I. Band: Von den ältesten Zeiten bis 1200 n. Chr. (1922).

II. Band: Von 1200—1668. (1923).

III. Band: Von 1668—1758. (1922).

IV. Band: Von 1759—1799. (1924).

5) Geschichte der Mathematik.

I Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius, von Siegm. Günther 1908 (Band 18).

II Teil. Von Cartesius bis zur Wende des 18 Jahrhunderts, von H. Wieleitner.

1 Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis 1911. (Band 63).

2 Hälfte: Geometrie und Trigonometrie 1921. (Band 64).

Berlin. Walter de Gruyter & Co.

Dit werk, dat niet overzichtelijk is, maar door de vele goede registers toch gemakkelijk te raadplegen, zou aanvankelijk door GÜNTHER en VON BRAUNMÜHL worden geschreven; daarbij zou GÜNTHER de Oudheid en Middeleeuwen en VON BRAUNMÜHL den nieuweren tijd nemen. De laatste stierf echter voor hij aan het werk kon beginnen; daarom werd het tweede deel door WIELEITNER geschreven onder gebruikmaking van de nalatenschap van VON BRAUNMÜHL. De oorlog was oorzaak dat tusschen het verschijnen van de beide helften van het tweede deel een tijdruimte van 10 jaren ligt. Het geheele werk beslaat omstreeks 900 bladzijden en is zonder meer aan te bevelen; men lette er evenwel op dat het slechts tot het jaar 1800 gaat.

Een bijzondere plaats neemt de Geschichte der Elementar-Mathematik van JOH. TROPFKE in, welke oorspronkelijk in twee deelen verscheen (1902—'03). Van de overige werken over de geschiedenis der wiskunde onderscheidt het zich doordat het niet naar tijdsorde, maar naar de stof is ingedeeld. Thans is het geheel herzien en uitgebreid opnieuw uitgegeven in zeven deelen [1]). Het werk is buitengewoon volledig en met een bewonderenswaardige nauwgezetheid tot in de kleinste onderdeelen verzorgd; elk deel is van vele honderden noten aan den voet van de bladzijde voorzien. Van iedere methode of bewerking wordt de geschiedenis volledig besproken, van iedere vakterm oorsprong en beteekenis zorgvuldig nagegaan; soms worden geheele stellingen of definities in de oorspronkelijke taal aangehaald. Op het wiskunde-onderwijs in Duitschland heeft het werk een zeer grooten invloed uitgeoefend.

Voorts mag, hoe onvolledig deze lijst uit den aard der zaak ook blijven moet, niet onvermeld blijven een grooter werk uit den aller-

---

[1]) Johannes Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Berlin. Walter de Gruyter & Co.

I. Band: Rechnen (1921).
II. Band: Allgemeine Arithmetik (1921).
III. Band: Proportionen. Gleichungen (1922).
IV. Band: Ebene Geometrie (1923).
V. Band: Ebene Trigonometrie. Sphärik und Sphärische Trigonometrie (1923).
VI. Band: Analysis. Analytische Geometrie (1924).
VII. Band: Stereometrie. Verzeichnisse (1924).

laatsten tijd, dat zoowel om de fraaie uitvoering als om de kundigheid van den schrijver alle aanbeveling verdient: de geïllustreerde Geschiedenis der Wiskunde, die door den Amerikaanschen geleerde D. E. SMITH in 1923 is begonnen en waarvan thans één deel is verschenen [1]).

Een klein werkje van HEIBERG [2]) over de wis-, natuur- en geneeskundige wetenschappen bij de Grieken en Romeinen worde hier ook nog genoemd. In een honderdtal bladzijden behandelt de bekende Deensche geleerde de stof op populaire wijze, zoodat het boekje inzonderheid geschikt is om den leerlingen in handen te worden gegeven. Ook onder de deeltjes der Mathematisch-Physikalische Bibliothek treft men verscheidene aan, die de historische ontwikkeling van bepaalde problemen behandelen [3]).

Ten slotte worde nog verwezen naar het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, waarin Prof. Dr. H. DE VRIES eenige malen artikelen op historisch gebied publiceerde [4]).

---

1) D. E. Smith. History of Mathematics. Vol. I: General Survey of the history of Elementary Mathematics. Boston. Ginn. 1923.

2) J. L. Heiberg. Naturwissenschaft, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum. Aus Natur und Geisteswelt no. 370). Leipzig. Teubner.

3) Mathematisch-Physikalische Bibliothek, herausgeg. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig. Teubner.

B.v.: No. 1 en 34: E. Löffler. Ziffern und Ziffernsysteme der Kulturvölker.
No. 12: E. Beutel. Die Quadratur des Kreises.
No. 32: H. E. Timerding. Der goldene Schnitt.
No. 49: E. Fettweis. Wie man einstens rechnete.

Verder moge nog speciaal de aandacht worden gevestigd op de volgende twee aardige werkjes van deze reeks:
No. 15: A. Witting und M. Gebhardt. Beispiele zur Geschichte der Mathematik.
No. 18. W. Ahrens. Mathematiker-Anekdoten.

4) Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (Groningen. Noordhoff).
3e Jaargang 1915—'16 bl. 1: John Napier en de eerste logarithmentafels.
en bl.: 255: Gaspard Monge en de ontdekking der Beschrijvende Meetkunde.
4e Jaargang 1916—'17 bl. 145: De Géométrie van Descartes en de „Isagoge" van Fermat.

In den 11en Jaargang (1923—'24) is genoemde hoogleeraar een reeks „Historische Studiën" begonnen, waarin hij de vruchten geeft van zijn historisch college aan de Amsterdamsche Universiteit en van de daarbij aansluitende literatuurstudie van zijn toehoorders.

Ik kan niet beter doen dan dit opstel te besluiten met enkele woorden, die GEBHARDT in het voorbericht van zijn verhandeling schrijft en die ik geheel tot de mijne maken kan: „Es wäre mir ein schöner Lohn, wenn ein Teil der Begeisterung, die mich für die Sache erfüllt, auch auf andere überginge. Und diejenigen Fachgenossen, die ich nicht zu überzeugen vermochte...... bitte ich, meine Anregungen nicht kurzerhand zurückzuweisen, sondern vorurteilsfrei einmal einen Versuch im Sinne derselben zu machen. Ich lebe der festen Ueberzeugung, dass ihre Erfahrungen nicht enttäuschen werden."

Naschrift van de Redactie. In aansluiting aan bovenstaand artikel wil ik gaarne de aandacht vestigen op een werkje, dat ik zelf met bijzonder veel genoegen gelezen heb, en dat mijns inziens zeer geschikt is, EUCLIDES nader te brengen tot de hedendaagsche docenten en leerlingen. Ik bedoel: TH. L. HEATH, Euclid in Greek, Book I. Cambridge University Press, 1920 (10/—). Het boekje bevat een historische inleiding van 40 bladzijden, den Griekschen tekst van boek I der Elementen (70 bladz.), en aanteekeningen (120 bladz.), die voor een belangrijk deel van spraakkunstigen aard zijn, en de lezing zeer vergemakkelijken, zoodat iemand, die zijn Grieksch niet onderhouden heeft, geen groote moeilijkheden zal ondervinden.

J. H. S.

MOET HET MEETKUNDE-ONDERWIJS GEWIJZIGD WORDEN?

Een antwoord aan den heer E. J. DIJKSTERHUIS.

DOOR

T. EHRENFEST—AFANASSJEWA.

Onder dezen zelfden titel heeft de heer E. J. DIJKSTERHUIS [1]) een reeks van kritische opmerkingen over mijn brochure [2]) gemaakt.

Ondanks het besliste verbod, dat zijn motto tot mij richt, maar in overeenstemming met den vriendelijken brief, dien hij mij schreef, acht ik het een plicht, die echter tevens een genoegen is, nog eens terug te komen op hetzelfde „ewig grüne" onderwerp: de wijze, waarop de mensch denkt en de methoden, die de ontwikkeling van zijn denkvermogen kunnen bevorderen.

Ik wil met het gemakkelijkste beginnen: trachten eenig misverstand over de terminologie uit den weg te ruimen.

1. De uitdrukking *bewust:* een handeling (meening, indruk enz.), waarvan wij ons wel bewust zijn, maar waarvan de motieven ons nog niet duidelijk zijn geworden, is in mijn terminologie „een *bewuste* handeling met *onbewuste motieven*"; den naam „onbewuste *handeling*" reserveer ik echter voor een handeling, die...... onbewust is!

Het komt mij voor, dat men bij consequente toepassing van deze terminologie nooit zal stuiten op antinomieën, zooals de heer D. ze aanvoert (hij gebruikt tevens de woorden „onbewust" en „intuïtief" als synoniem; wat in mijn terminologie geenszins het geval is. Verg. blz. 49).

---

1) Bijvoegsel van het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, 1e Jaargang 1924/1925. Nr. 1, pag. 1. P. Noordhoff, Groningen.

2) Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven? door T. Ehrenfest-Afanassjewa. Bij J. B. Wolters' U. M. Groningen, Den Haag, 1924.

2. De uitdrukking *intuïtie:* op het gebied der ruimteleer valt dit begrip inderdaad samen met wat SCHOPENHAUER *Anschauung* noemt; ik zou echter niet met zekerheid kunnen zeggen, tot hoever onze wegen samengaan, daar ik niet geloof, dat hij onder *Anschauung* hetzelfde verstaat als wat ik „het intuïtieve materiaal der Axiomatica" genoemd heb [1]). Mocht het echter geoorloofd zijn, de beteekenis van het woord *Anschauung* zoover uit te breiden, dan zou ik natuurlijk alles, wat SCHOPENHAUER over de noodzakelijkheid van de *Anschauung* bij het denken en uitvinden zegt, zonder voorbehoud onderschrijven [2]).

Ter nadere verduidelijking wil ik ingaan op de vraag, die de heer D. stelt over de intuïtie op het gebied der meer-dimensionale ruimtes: deze is, meen ik, hoofdzakelijk *algorithmisch* van aard. De „meetkunde" van deze „ruimtes" met meer afmetingen is analytische meetkunde, d.w.z. ze onderzoekt analytische vormen, waarvan bijzondere gevallen voor bepaalde aantallen variabelen een gemakkelijke interpretatie in onze drie-dimensionale ruimtelijke voorstelling toelaten; voor een willekeurig aantal variabelen behouden zij echter dezelfde namen en dit helpt ons om bij analogie zekere betrekkingen reeds zonder berekening juist te raden.

Daarom vormen ook de voorstellingen van de driedimensionale ruimte een wezenlijk bestanddeel der intuïtie bij den omgang met de ruimtes van meer dimensies.

Ik geloof niet, dat daarbij naast de analytische vormen, de driedimensionale ruimtelijke voorstellingen en de in woorden uitgedrukte stellingen nog iets geheimzinnigs in de intuïtie voorkomt [3]).

---

1) loc. cit. pag. 10, r. 19 en de bijbehoorende noot 3.

2) Evenals vele andere dingen, die deze, door mij zeer vereerde denker gezegd heeft.

3) Het spreekt vanzelf, dat wanneer men bij de behandeling van de driedimensionale ruimte aan de ruimtelijke voorstelling nog het heele formule-materiaal toevoegt, men rijker aan hulpmiddelen geworden is; laat men echter het eerste, de voorstelling, varen, dan berooft men zich van kostbare hulpmiddelen, om de noodige betrekkingen te ontdekken en hare beteekenis juist te beoordeelen; natuurlijk gaat het er wel om en ik weet, dat er wiskundigen zijn, die in de analytische meetkunde bijna uitsluitend analytisch te werk gaan.

Uitgesproken waardeering is aan de beteekenis van de ruimtelijke voorstelling geschonken door Prof. F. Klein te Göttingen; deze verzuimde op zijn colleges niet, om bij de bespreking van ruimtekrommen

Over het woord *intuïtie* moet ik nog een opmerking maken: geen van mijn critici, is, voorzoover ik weet, ingegaan op de volgende passage: [2])

Het einddoel van het denken..... is het verkrijgen van een *intuïtief beeld,* dat volmaakter is dan het oorspronkelijke en dat men goed doorziet.

Waarschijnlijk hebben zij deze passage niet opgemerkt; immers zij plegen, ook wanneer zij het in groote trekken met mij eens zijn, over de intuïtie als over iets wezenlijk *onbewusts* te spreken. In mijn terminologie is echter de „intuïtie" iets, dat niet ophoudt te bestaan, nadat het door het zoeklicht van het bewustzijn beschenen is. Dit „iets" bestaat en moet dus een eigen naam hebben. Wie „intuïtie" niet goed vindt, stelle een anderen naam voor, maar het ding zelf mag niet vergeten worden.

3. De uitdrukking *ruimteleer:* als ik den heer D. goed begrepen heb, is dit bijna hetzelfde, als wat hij *Axiomatica a priori* noemt. De overeenstemming bestaat hierin, dat wij beide

1. daarin een duidelijke, op *explicite* uitgesproken onderstellingen gebaseerde, bewijsvoering der meetkundige betrekkingen verlangen, die *ook in de oogen der leerlingen,* ten doel hebben, zekerheid aangaande de juistheid dier betrekkingen te verschaffen;
2. in dit stadium het onderzoek — en dus ook de vraag — naar de onafhankelijkheid der axioma's ongepast vinden.

Het verschil is echter dit, dat ik, in tegenstelling tot den heer D., van meening ben, dat, wanneer men het probleem van de onafhankelijkheid der axioma's toch niet stelt, men niet kan motiveeren, waarom men een evidente stelling op een andere, even evidente, terugbrengt. De heer D. spreekt van de *zekerheid* der grondslagen,

---

en oppervlakken van hoogeren graad draad- en gipsmodellen onder het auditorium te laten circuleeren.

In de *elementaire* meetkunde staat het echter zoo, dat wanneer men daar van de ruimtelijke voorstelling afziet, er niets anders meer overblijft dan woordsystemen! Hieruit kan men, als men het nog de moeite waard vindt, volgens de regels der formeele logica andere woordsystemen vormen, maar zelfs dit simpele systeem: „laten we nu de hulplijn MN trekken", zou er niet eens onder kunnen voorkomen.

[1]) loc. cit. pag. 11, r. 34 seq.

waarop alles, wat in dezen cursus geleerd wordt, moet worden teruggebracht. Ik mijnerzijds meen, dat die „zekerheid" hier niets anders kan beteekenen dan „evidentie" (wat niet hetzelfde behoeft te zijn als objectieve waarheid). Ontkent de heer D. dit, dan verzoek ik hem, te zeggen, waarom hij zelve de stelling, dat door twee punten slechts één rechte lijn kan gaan, voor zekerder houdt, dan de stelling, dat de rechte lijn tusschen ieder tweetal punten korter is dan iedere gebroken lijn tusschen hetzelfde tweetal: in sommige niet-Euclidische meetkunden zijn beide stellingen buiten zekere grenzen niet meer geldig en tegenwoordig weten wij immers niet meer, welke meetkunde het best past op de ruimte, waarin wij leven!

Wanneer wij de eene evidente stelling als axioma toelaten en voor een andere, even evidente stelling, een bewijs verlangen, dan kunnen wij er ons niet op beroepen, dat we weliswaar niet zeggen, wat „onafhankelijke axioma's" zijn, maar dat we onze leerlingen toch voor de toekomst reeds van het systeem der onafhankelijke axioma's voorzien: want dit doet geen der op de scholen gebruikelijke meetkunde-cursussen (men denke aan de vaagheid van de begrippen „beweging" en „op elkaar leggen", om nog maar te zwijgen van de stelling, dat twee lijnen, die met een derde gelijke hoeken maken, elkander niet snijden, wat in vele Hollandsche schoolboeken als axioma aangenomen wordt).

Men zou tenslotte het vermoeden kunnen opperen, dat er bij de leerlingen werkelijk weinig zekerheid zou kunnen bestaan b.v. over de stelling van de relatieve lengtes van de rechte en de gebroken lijn — ik zou mij echter met vermoedens niet tevreden stellen, en zou bij iedere gegeven groep leerlingen willen vaststellen, wat voor hen werkelijk zóó evident is, dat ze zelfs het doel van een nadere bespreking niet kunnen begrijpen. (Dit is zoo moeilijk niet, wanneer men maar gewoon is, de leerlingen zich te laten uitspreken. Wanneer echter minstens één leerling in de klasse bezwaren tegen zulk een stelling heeft, dan zal dit in de oogen der anderen een redelijk motief zijn, om naar een bewijs te zoeken — en daardoor zal practisch het aantal der „voorloopige" axioma's voldoende beperkt blijven.)

De waarde van een zorgvuldig kritisch onderzoek ziet men eerst in, wanneer men „er in geloopen" is en daartoe bieden zich op ieder oogenblik ontelbare gelegenheden aan, waarvan de heer D. ook al enkele opnoemt. Daarom verbruike men den kostbaren tijd

niet voor discussies, waarvoor op het gegeven oogenblik toch niet de noodige ontvankelijkheid bestaat, terwijl de in het oog springende aanleidingen tot het geven van bewijzen onmiddellijk daarna te wachten staan [1]).

4. De uitdrukkingen *Seinsgrund* en *Erkenntnissgrund:* Waarschijnlijk had SCHOPENHAUER meetkunde-onderwijs gehad volgens de methode, die de heer D. aanbeveelt; daardoor en doordat hij uit zich zelf niet genoeg belangstelling voor de wiskunde in het algemeen had, zijn de Euclidische bewijzen voor hem nooit iets anders geweest dan uiteenzettingen van den „Erkenntnissgrund" en hebben ze hem niet, zooals behoort, den „Seinsgrund" der te sprake komende betrekkingen, het organische verband met die grondeigenschappen der ruimte, die in de axioma's worden uitgesproken, kunnen toonen. Zoo gaat het immers steeds, wanneer iemand door woorden naar een zeker doel gevoerd wordt en niet zelf uit eigen intuïtie dat doel bereikt: dezelfde woorden hebben in deze beide gevallen verschillende beteekenissen.

Verder wil ik nadrukkelijk aangeven, waarin ik het met den heer D. eens ben.

1. In alles, wat hij zegt over de waarde van een nauwkeurige formuleering, bespreking, bewijsvoering, van een doelmatige notatie. Ik hoop, dat hij dit nu al zal hebben ingezien op grond van wat ik boven over de Ruimteleer zeide; bovendien vertrouw ik, dat wanneer hij nu zoo vriendelijk zal zijn, nog eens mijn brochure op te slaan,

---

[1]) Het bewijs van de stelling van de gelijkheid der basis-hoeken in den gelijkbeenigen driehoek — in den zin van het opsporen van die Euclidische axioma's die aan deze stelling „schuld hebben", zal toch wel meer door de leerlingen gewaardeerd worden, wanneer men de vraag stelt, hoe het analoge geval op een *eivormig* oppervlak is. Dit hoort echter thuis in de „Axiomatica a posteriori". Ik zou trouwens niet verboden willen zien, om dergelijke vragen reeds in den ruimteleer-cursus in te schakelen, mits slechts de beide gezichtspunten streng gescheiden blijven, opdat de leerlingen niet zullen kunnen meenen, dat men van hen twijfel verlangt aan iets, waaraan ze niet kunnen twijfelen. Ook in dit opzicht moet bij hen, terwille van de logica, volkomen klaarheid bestaan.

hij daarin ook geen afwijking van deze overeenstemming zal vinden [1]). Ik zou hierbij echter eenige opmerkingen willen maken.

a. De zuiverheid en eerlijkheid van het mathematische denken blijven volkomen onaangetast, wanneer men zich steeds rekenschap geeft van wat men zonder bewijs wil aannemen; het aantal van zulke aannamen is, meen ik, voor de eerlijkheid niet van belang.

b. Bij de practische toepassing van de kunst, zuiver en eerlijk te discussieeren, heeft men meestal te doen met gevallen, waarin men zich onmiddellijke zekerheid niet over de axioma's, maar slechts over de eindresultaten verschaffen kan. Zoo gaat men te werk in de natuurwetenschappen, om een theorie van bepaalde verschijnselen op te bouwen of af te breken; zoo ook handelen wij keer op keer in den omgang met andere menschen — b.v. wanneer wij hun karakter trachten te doorgronden — of ook in de vele kleine en groote aangelegenheden van het practische leven. Maar is het, om dit te kunnen, wel zoo erg nuttig, er aan gewend te zijn slechts van volkomen gegarandeerde axioma's uit te gaan? [2]).

c. Ten onrechte kent men aan de meetkunde het monopolie toe, het verschil tusschen een directe en een omgekeerde stelling duidelijk te kunnen maken: om dit verschil goed te laten uitkomen, wat immers noodzakelijk is, voor men de eerste (evidente!) omgekeerde stelling laat bewijzen, moet men voorbeelden geven, waarin de omgekeerde stelling niet alleen niet evident, maar zelfs onjuist is [3]) en daar men op zulk een oogenblik nog bijna geen meetkundige stellingen kent, is men aangewezen op voorbeelden uit andere gebieden, „uit het leven".

---

[1]) Mijn geheele brochure is in deze stemming geschreven, maar misschien moet ik nog in het bijzonder op Hoofdstuk IV wijzen.

[2]) Zou niet het al te vaak mislukken van onze pogingen in de laatst genoemde gevallen juist daarop berusten, dat wij, bij het verband leggen tusschen onze axioma's en de gevolgen, vergeten, dat juist de axioma's heelemaal niet gegarandeerd zijn?

[3]) We behoeven hier niet te twisten over de oorzaak, waardoor de regels der formeele logica zulk een onweersprekelijke macht over ons intellect hebben, maar moeten in ieder geval als empirisch feit erkennen, dat, wanneer iemand nooit aan voorbeelden beleefd heeft, dat, als de stelling: *alle A zijn B*, juist is, er ook B kunnen bestaan, die niet A zijn, hij ook den regel van de eventueele onjuistheid van de omgekeerde stelling niet begrijpt. Ook hier is een ervaring noodzakelijk, die den intuïtieven inhoud levert.

Het is waar, dat men den leerling bij geen andere gelegenheid zooveel rust gunt, om zijn opmerkzaamheid op zulke dingen te richten, maar men moet er zich van bewust zijn, dat het begrip van de betrekking tusschen een stelling en haar omgekeerde niet gebonden is aan den specialen aard der meetkundige stellingen.

2. Het andere punt, waarop ik het volkomen met den heer D. eens ben, is dat de meeste leerlingen groote moeite hebben, zich de ruimtelijke figuraties voor te stellen.

3. De heer D. geeft zijnerzijds toe, dat iets meer ruimtelijk voorstellingsvermogen geenszins zou schaden.

Nu komen echter de punten, waarop wij van meening verschillen:

Een daarvan zou gemakkelijk door de ervaring kunnen worden opgelost, wanneer men daartoe slechts bereid was: de heer D. wil niet gelooven, dat door den omgang met het aanschouwelijke materiaal van een propaedeutischen cursus het ruimtelijk voorstellingsvermogen van de leerlingen in belangrijke mate kan worden ontwikkeld; dat dit wel het geval is, wordt echter verklaard door de leeraren, die het zelf geprobeerd hebben, zelfs in gevallen, waarin de keuze der oefenstof tamelijk beperkt was en de pogingen nog tastend geschiedden.

Welk een verlichting en bevrediging men een leerling, die met een stereometrisch vraagstuk sukkelt, geven kan, wanneer men hem het aanschouwelijke beeld helpt opbouwen, kan natuurlijk ieder gemakkelijk ervaren; maar wanneer men daarmee komt midden in den systematischen cursus, is het te laat. Iedereen zal aanvankelijk wel de behoefte hebben, zich de dingen, waarover hij spreken *moet*(!), ook voor te stellen en wanneer die behoefte in een gegeven stadium niet meer aanwezig blijkt te zijn, zal men dit wel in de eerste plaats aan wanhoop moeten toeschrijven. De heer D. hecht niet genoeg waarde aan den propaedeutischen cursus, dien het leven in de eerste plaats aan hem zelf — want hij was toch een goed meetkundeleerling — gegeven heeft. Hij moet zich echter afvragen, hoe het met vele anderen gesteld is, die niet spontaan de gewoonte hebben, de vormen om zich heen op te merken en erover te phantaseeren. Voor hen zijn de figuren der planimetrie slechts teekeningen in het boek en op het bord en voor hen is de klove tusschen die teekeningen en de vlakke figuraties in de ruimte, waarvoor ze in de Stereometrie worden geplaatst, bijna niet te overbruggen.

Wanneer men dan ook den leerling in aanraking brengt met de noodige aanschouwelijke hulpmiddelen, dan is dat geen „vergen", zooals de heer D. het noemt, maar een *geven*. Wanneer daarentegen bij de methode, die de heer D. beschrijft, nog eenige ontwikkeling van het voorstellingsvermogen kan worden geconstateerd, dan geschiedt *dat*, vrees ik, ten koste van een vergen *zonder geven*.

De heer D. vindt het ontmoedigend voor een leerling, te bemerken, „dat zijn meer met voorstellingsvermogen begaafde medeleerlingen of zijn sterk op de intuïtie den nadruk leggende leeraar plotseling iets „zien", waarvan hij zich niets kan voorstellen."

Ik ben dit volkomen met hem eens (ik geloof trouwens, dat dit gevoel van hulpeloosheid ook dan aanwezig zal zijn, wanneer niemand in de klasse zich iets voorstelt), maar men kan de makkers, die iets kunnen „zien", als ze er bij ongeluk zijn, toch niet wegwerken, en het eenige middel, om er immuun tegen te worden, zal dus wel zijn, het eigen voorstellingsvermogen te ontwikkelen. Wanneer daarvoor van den beginne af gezorgd is, zal zoo iets onaangenaam „plotselings" ook niet gebeuren. Dit is een van de gronden, waarom ik het wenschelijk acht, den propaedeutischen cursus stereometrisch in te richten.

Ik moet hierbij nog op enkele losse opmerkingen en vragen van den heer D. ingaan.

Teekenen uit het hoofd hangt op de volgende wijze met het voorstellingsvermogen samen: het geeft den leerling de gelegenheid tot zelfcontrôle, het houdt zijne opmerkzaamheid bij ieder wezenlijk element der figuur vast en prikkelt hem tot nauwkeuriger voorstelling. Ook voor den leeraar is het een goed hulpmiddel, om te controleeren, wat den leerling nog ontbreekt en wat hij hem dus door het laten beschouwen van voorwerpen nog moet laten verwerven. Het spreekt vanzelf, dat het daarbij niet op een mooie teekening aankomt: vaak zal zelfs een slechts topologische overeenstemming voldoende zijn, om te waarborgen, dat de leerling zich het bedoelde ding goed voorstelt. Het coördineeren van de handbewegingen met de voorstelling, waardoor het vermogen tot teekenen zich van het voorstellingsvermogen onderscheidt, kan, zij het ook in beperkte mate, gemakkelijk worden aangeleerd, zooals door vele teekenleeraren, die dergelijke oefeningen reeds met andere bedoelingen en aan ander materiaal laten doen, geconstateerd is.

Een icosaëder topologisch juist te teekenen is niet zoo moeilijk,

als de heer D. wel denkt [1], maar waarom wil hij toch tot elken prijs juist met een icosaëder beginnen? Ik heb uitdrukkelijk gezegd, dat mijn heele opsomming van onderwerpen, die men in den propaedeutischen cursus zou kunnen behandelen, slechts ten doel heeft, aan te toonen, dat er geen gebrek aan stof is; op welke wijze en tot welken graad van complicatie men die stof gebruikt, moet van den aard der leerlingen en van dien van den leeraar afhangen.

Misschien bestaan er voor iederen mensch grenzen, waar geen macht hem overheen helpt, maar voor ons is hier de keerzijde van belang: dat er voor iedereen wèl hulpmiddelen bestaan, die hem eenigszins kunnen verheffen boven den natuurlijken toestand, waarin hij voor de eerste maal voor zijn leeraar verschijnt, en dat deze middelen op het speciale gebied der ruimtelijke voorstelling bestaan in het verzamelen van zintuigelijke waarnemingen en de verwerking daarvan onder leiding van den leeraar.

De heer D. vraagt, hoe ik verlangen kan, dat de leerlingen zich de ruimtelijke figuraties althans qualitatief juist voorstellen, vóór ze geleerd hebben, daarover logisch bevredigende stellingen uit te spreken. Ik moet daar de vraag tegenover stellen: hoe kunnen ze iets anders doen, dan die stellingen napraten, vóór ze geleerd hebben, zich de dingen, waarover ze spreken, goed voor te stellen.

Hoe kunnen zij weten, welke theorema's toegepast moeten worden, om het vraagstuk van de vijf lijnen en het vlak, dat de heer D. ter illustratie van zijn methode vermeldt [2], op te kunnen lossen, wanneer zij zich deze lijnen en dit vlak heelemaal niet voorstellen? Ik geef toe, dat het in dit geval voldoende zou zijn, zich de verschillende elementen slechts successievelijk, groepsgewijze, voor te stellen, om de methode van oplossing te vinden (maar *heelemaal niet,* zooals de heer D. uitdrukkelijk zegt? [3]), maar is het principieel juist, dat ze, zoover gekomen, het heele probleem weer mogen vergeten en niet zullen moeten probeeren, zich de gevraagde lijn althans achteraf voor te stellen?

---

[1]) Men kan daarbij de volgende methode toepassen: men neme een model van een icosaëder in de hand en legge het niet weer weg, voor men uitgevonden heeft, hoe men het moet oriënteeren, om gemakkelijk te zien, dat het werkelijk een icosaëder is.

[2]) loc. cit. pag. 19, r. 38 seq.

[3]) ibidem, pag. 20, r. 31—32.

Hiermee zijn we echter aan een tweede en wel zeer gewichtig verschilpunt gekomen: met welk soort van inzicht mag men zich tevreden stellen?

Er bestaan ongetwijfeld voor iedereen op elk gebied problemen, waarvan hij het geheele intuïtieve materiaal niet in één samenhangend beeld kan overzien; dat ik dergelijke grenzen maar al te goed ken, heb ik in de noot van pag. 11 van mijn brochure uitgesproken; maar voelen wij ons bevredigd, wanneer wij, aan een dergelijke grens gekomen, niet in staat zijn, haar verder te verleggen? zelfs, wanneer we de mogelijkheid, om door rekenen die grens te overschrijden, voorloopig als een ontwijfelbare triomf van onze rekenkunst moeten begroeten? *Mogen* wij ons daarbij neerleggen, voordat wij alle middelen hebben beproefd, het geheel toch intuïtief te begrijpen?

Het zij mij vergund, een episode uit mijn naaste omgeving te verhalen: een geleerde vertelt triomfantelijk aan een vriend, dat hij een physisch effect heeft berekend, dat men a priori nooit voor mogelijk zou hebben gehouden, dat men ook a posteriori niet begrijpen kan, maar dat de gelegenheid opent, een zeer interessante en voordeelige technische toepassing te construeeren. De vriend, die voor berekeningen zonder intuïtie niet genoeg respect heeft, kan zich niet bij het geval neerleggen. Hij tracht het ook intuïtief te begrijpen, maar komt tot een ander resultaat. Dit geeft den beiden vrienden aanleiding, het heele probleem nog eens rustig na te rekenen, maar nu onder voortdurende voeling met de intuïtie; en nu blijkt, dat er in de oorspronkelijke berekening......... één teekenfout had gezeten.

Deze zelfde neiging, om bij het eenmaal verkregen reken- of redeneerresultaat stil te blijven staan, voert ook zoo vaak de leerlingen tot de domste fouten en iedere leeraar kan er de vermaning in vinden, hoe weinig waarde het heeft, te kunnen rekenen, wanneer men daarbij niet de gewoonte heeft, het verkregen resultaat in het integrale intuïtieve beeld in te passen; de kleinste fout maakt een heele berekening waardeloos, maar kan zelfs de meest opmerkzame mensch zich voor fouten gevrijwaard achten? en hoeveel opmerkzame menschen zijn er op de wereld?

Wanneer de leerlingen in staat zijn, dank zij het ontwikkelde voorstellingsvermogen, een voldoende hoeveelheid betrekkingen integreerend, „in vogelvlucht" te overzien, kan hun de gewoonte

bijgebracht worden, bij ieder probleem naar het integrale inzicht te streven — ook dan, wanneer ze voorloopig het resultaat slechts volgens de „wormmethode” der geleidelijke overwinning van moeilijkheden verkregen hebben. Met den geringen voorraad voorstellingen, dien de meeste leerlingen vóór het begin van het meetkunde-onderwijs bezitten, kan echter van zulk een overzicht — vooral in de stereometrie — geen sprake zijn.

Och, ik stel me natuurlijk niet voor, dat men op deze manier uit iederen stakker van een leerling een vogel zal kunnen maken, maar men zal ze toch allemaal wat dichter bij het gezonde verstand kunnen brengen.[1])

Wanneer men iemand niet al te veel detailkennis bijbrengt, maar men leert hem, om dat, wat hij weet, te overzien, ontwikkelt men bij hem die zijde der logica, die hij ook kan toepassen op alles, wat hij later in het leven ontmoet: dit lijkt mij van meer belang, dan hem lastig te vallen met problemen, waarvan hij de oplossingen slechts moeizaam en *onzelfstandig* kan opsporen: zulke geestesoefeningen zal hij toch ongebruikt laten liggen en op al het overige zal hij reageeren met de goede oude „vrouwenlogica”[2]) of met de gebruikelijke spreekwijze: „in de wetenschap moet men exact

---

[1]) Deze zelfde tendentie kan men waarnemen, waar in de moderne paedagogisch-mathematische litteratuur de eisch gesteld wordt, het „functioneele denken” bij de leerlingen te ontwikkelen. Als hulpmiddelen daarvoor worden de graphische voorstellingen aanbevolen; daarbij moeten relaties tusschen verschillende grootheden uit allerlei andere gebieden in het ruimtelijke „vertaald” worden; blijkbaar vindt dus de gedachte, dat juist het ruimtelijke het gemakkelijkst toegankelijk is voor onze phantasie, steeds meer ingang.

[2]) Ik weet niet, of ik als vrouw nu wel juist competent ben, om te beoordeelen, wat vrouwenlogica is, maar toch zou ik een poging willen wagen: het is de manier, waarop de ongeschoolde mensch een probleem behandelt (een manier trouwens, die bij meer gecompliceerde problemen ook bij de meest fijn beschaafde mannen voorkomt): enkele punten van het betrokken intuïtieve beeld zijn volkomen helder en hij kan ze goed onder woorden brengen; het overige is onderbewust en wanneer hij probeert het te analyseeren, glijdt zijn opmerkzaamheid daaraan af; hij noemt dingen, die ook wel in zijn beeld voorkomen, en die op zich zelf ook wel waar kunnen zijn, maar die met de te behandelen vraag niets te maken hebben.

redeneeren, maar in het leven......". Tenzij hij pleizier in de methode gekregen heeft: dan zal hij juist het omgekeerde vertoonen: hij zal zich werpen op het concludeeren uit losse, langs verschillende wegen verkregen praemissen, die hij eventueel ook nog te eng of te wijd heeft opgevat, zonder aan het totale intuïtieve beeld te hebben gecontroleerd, of ze het wezenlijke treffen. [1])

Het ideaal, dat de heer D. schetst, is een ander dan het mijne en, naar het mij voorkomt, ligt dit niet alleen aan de zwakte van zijn geloof in de bereikbaarheid van mijn ideaal, maar ook aan ons verschil van smaak. Dan kan er natuurlijk van overeenstemming geen sprake zijn. Wanneer men echter toch soms „de gustibus" twist, dan geschiedt dit in de onderstelling, dat de ander de spijs, waaraan wij de voorkeur geven, nog niet geproefd heeft; had hij haar maar eerst eens geprobeerd, dan......

Er is nog een derde punt, waarover wij het niet eens zijn: het schijnt wel, alsof voor den heer D. het ruimtelijk voorstellingsvermogen een attribuut is van den aanleg voor wiskunde. Dit is, zooals ieder in zijn naaste omgeving waar kan nemen, niet het geval: er zijn niet-mathematisch-begaafde menschen, met een uitstekend ruimtelijk voorstellingsvermogen en goede mathematici, die dat vermogen slechts in geringe mate bezitten. Dit vermogen, waarvan de mate zoowel van natuurlijken aanleg, als van oefening afhangt, is evenzeer een eigenschap op zich zelf, als b.v. de zin voor kleur, het muzikale gehoor en dergelijke. En daarom is het ook niet moeilijk, om juist den *propaedeutischen* cursus stereometrisch te maken: de theorie van de muziek leert men ook eerst, nadat men zijn gehoor door oefening in de muziek ontwikkeld heeft.

Vóór het begin van het meetkunde-onderwijs hebben de leerlingen ook niet geblinddoekt rondgeloopen; ja, *wanneer* ze in de eerste meetkunde-lessen nog *iets snappen,* dan komt dit alleen, doordat ze al over een zekeren voorraad voorstellingen beschikken; en wanneer men dan het materiaal tot uitbreiding van dien voorraad doelbewust ophoopt en ordent en de opmerkzaamheid der leerlingen daarop richt, dan verlangt men niets onbereikbaars van hen.

Wel wordt hierbij iets van den leeraar gevergd: hij moet zelf een bewegelijke ruimtelijke phantasie bezitten, om die ook bij de

---

[1]) Zou men deze methode — ter wille van de symmetrie — niet „mannenlogica" mogen noemen? Ook zij komt trouwens, min of meer gematigd, bij beide geslachten voor.

leerlingen te kunnen ontwikkelen; hij moet vindingrijk genoeg zijn, om de beschikbare materieele objecten voor de noodige oefeningen te kunnen gebruiken; hij moet naast de zuiver mathematische ook andere interessen tot op zekere hoogte bezitten, waardoor hij met zulke objecten vertrouwd kan zijn. Anderzijds moet hij ook met de streng systematische methode goed vertrouwd zijn, om de leerlingen vastberaden tot het einddoel van den propaedeutischen cursus te kunnen brengen: tot het besef van de noodzakelijkheid van een systematischen opbouw; en bovendien moet hij den leerling goed kunnen waarnemen en diens behoeften kunnen raden. Het gemis aan deze eigenschappen kan gemakkelijk tot een pijnlijk weifelen voeren, dat gevaarlijk kan worden voor de orde. Mij dunkt, dat de leeraar den propaedeutischen cursus met een klaar plan moet beginnen, maar dat hij ieder oogenblik bereid en in staat moet zijn, daarvan af te wijken in de richting, die door de actueele behoeften van de leerlingen — onverwachte gapingen in hun inzicht, bijzonder sterke belangstelling in bepaalde quaesties enz. — aangegeven wordt. Dit brengt echter ook weer een vergemakkelijking met zich mee, omdat men zich niet gebonden behoeft te voelen door den eisch, dat een bepaalde hoeveelheid stof moet worden doorgewerkt: iedere beschouwing van ruimtelijke objecten, waartoe men den leerling kan krijgen, zonder dat men er hem, onder tegenstribbelen, toe dwingt, verschaft al een nuttige oefening.

Resumeerend moet ik zeggen: deze strijd om de methode is eigenlijk een strijd om het doel; wie een nieuw ideaal heeft, zal zoeken naar een nieuwen opbouw van het onderwijs. Ik voor mij geloof echter, dat velen, die tot nu toe gewoon waren, slechts te denken aan de vroegere methode — die in de overwegende meerderheid der gevallen ook nog de tegenwoordige is —, eigenlijk hetzelfde ideaal hebben, dat ik getracht heb, hier te schetsen. Misschien zullen zij in deze discussies aanleiding vinden, hun methode nog eens aan hun ideaal te toetsen.

Leiden, 25 December 1924.

ANTWOORD AAN MEVROUW EHRENFEST—AFANASSJEWA.

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Het antwoord van Mevrouw Ehrenfest op de critische opmerkingen, die ik gemeend heb te moeten maken op hare brochure over het Meetkunde-Onderwijs aan niet-wiskundige leerlingen, geeft mij aanleiding tot een korte repliek. Ik stel mij voor, daarbij ondergeschikte punten van meeningsverschil ter zijde te laten en slechts op de hoofdzaken in te gaan.

Tot die hoofdzaken reken ik de vraag, wat wij, in den gedachtengang van Mevrouw Ehrenfest, onder intuïtie hebben te verstaan. De moeilijkheden, die ik op dit punt bij de lezing van hare brochure ondervond, zijn door de nadere toelichting, die zij in haar antwoord geeft, namelijk niet verdreven. Mevrouw Ehrenfest beklaagt zich thans, dat hare critici, zelfs als ze tot hare geestverwanten behooren, over de intuïtie als over iets wezenlijk onbewusts spreken. Deze klacht begrijp ik niet; immers de door haar verworpen opvatting kan nergens sterkere bewijsplaatsen vinden, dan in haar eigen brochure. Definieert zij daarin de intuïtieve werkzaamheid niet als *het ontwaren van iets, zonder er zich rekenschap van te geven en ook het ordenen daarvan zonder bewustwording* en omschrijft zij haar onderscheiding van logica en intuïtie in de volgende alinea niet nader als een scheiding van het *bewuste* en het *onbewuste* deel in het procédé van inzien? Vermeldt ze niet enkele regels verder, als argument voor de noodzakelijkheid van de intuïtie voor den wiskundige, hoe volgens H. Poincaré het zoeken en vinden van wiskundige feiten dikwijls op *onbewuste* wijze geschiedt? Stelt ze ook daar niet het *ontwaren* tegenover het *bewust worden?* Verduidelijkt ze haar gedachtengang niet in de noot op dezelfde bladzijde, door te spreken van het intuïtief gegeven

gebied, waarlangs de geest van H. Poincaré rondzwierf, *voordat* het hem gelukte, het gezochte ook met zijn bewustzijn te vatten?

Als dit alles werkelijk te lezen staat op bladzijde 7 van hare brochure, hoe kan Mevrouw Ehrenfest er zich dan nu over beklagen, dat hare critici, wanneer ze haar gedachtengang trachten te volgen, over de intuïtie als over iets wezenlijk onbewusts spreken? Hoe kan zij mij in het bijzonder verwijten, dat ik ten onrechte *onbewust* en *intuïtief* als synoniem opvat, wanneer ik in een argumentatie ad hominem niets anders doe, dan letterlijk haar eigen definitie toepassen?

Ik acht dan ook de contradictie, die ik in het spraakgebruik van Mevrouw Ehrenfest heb meenen te vinden, geenszins opgelost door haar nadere verklaring, dat zij de woorden bewust en onbewust gebruikt in dezelfde beteekenis, die iedereen daaraan hecht en ik voel mij in de overtuiging, dat er iets hapert aan haar terminologie, versterkt door de uiteenzetting, dat de intuïtie nog bestaat, nadat ze door het zoeklicht van het bewustzijn beschenen is, dus niet meer onbewust is. Dit schijnt mij zelfs een argument te meer voor mijn meening, dat Mevrouw Ehrenfest niet de intuïtie, het „inzicht", als iets onbewusts had mogen aanduiden, maar dat alleen de wijze, waarop dat inzicht tot stand komt, onbewust mag worden genoemd.

Ik stap hiermee weer van de quaestie van de terminologie af; ze is belangrijk, omdat ik in het mislukken van de pogingen van Mevrouw Ehrenfest, om zóó, dat het voor den oplettenden lezer begrijpelijk is, te zeggen, wat ze onder intuïtie verstaat, het bewijs zie, dat zij zelve over dat begrip nog niet tot volkomen klaarheid is gekomen; maar ze is niet overheerschend, omdat het in de toepassingen, die zij van dit begrip maakt, wel mogelijk schijnt, haar bedoeling te vatten.

Wanneer ik thans ten eerste de vraag stel, of Mevrouw Ehrenfest in haar antwoord op den wezenlijken inhoud van mijn kritiek is ingegaan, dan moet ik tot mijn spijt constateeren, dat dit op de meeste punten niet het geval is. Ik had als de beslissende logische fout in haar betoog deze meenen te vinden, dat zij, inplaats van het ruimtelijk voorstellingsvermogen te beschouwen als een der vele vormen, waarin de meetkundige intuïtie zich kan uiten, de begrippen ruimtelijk voorstellingsvermogen en intuïtie als synoniemen opvatte. Wel verre van deze bewering te weerleggen, zelfs

maar te bestrijden, levert Mevrouw Ehrenfest in haar antwoord het treffende bewijs, dat hier inderdaad de zwakke plaats van haar betoog ligt. Ze vertelt namelijk nu het geval van een mathematisch-physische berekening, waarbij de auteur zoözeer was opgegaan in het zuiver technische werk, in het rekenen, dat hij, komende tot een physisch onbegrijpelijk resultaat, niettemin van de realiteit van het gevonden effect overtuigd was. Blijkbaar vindt de schrijfster — en wie zal haar tegenspreken? — dat zulk een zuiver formeel gebruik van de wiskundige taal tot verdwazing voert en ze herhaalt feitelijk dus nog eens, wat ze al in haar brochure had betoogd en wat ik in mijn critiek als volkomen vanzelfsprekend had beaamd: dat evenmin als formeel aaneenrijgen van syllogismen zonder helder inzicht in de beteekenis van de bestanddeelen daarvan, het algebraisch correct bewerken van formules zonder voortdurende overweging van de beteekenis van de daarin optredende symbolen, denken mag heeten.

Maar wat is nu de merkwaardige conclusie, waarvoor de verhaalde anecdote als argument moet dienen? Dat meetkunde-onderwijs niet vruchtdragend kan zijn zonder voorafgaande ontwikkeling van het voorstellingsvermogen! Niet alleen leidt dus Mevrouw Ehrenfest uit de praemisse, dat denken niet mogelijk is zonder intuïtie (een stelling, die, ik herhaal het, nooit door iemand betwijfeld is of kan worden) de conclusie af, dat meetkundig denken niet bestaan kan zonder ruimtelijke voorstelling, maar ze ziet zelfs in de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen het voorbehoedmiddel tegen een verwaarloozing van de intuïtie op andere gebieden van wetenschappelijk denken.

De overtuiging van de onmisbaarheid van dit vermogen schijnt den geest van Mevrouw Ehrenfest zoozeer te beheerschen, dat haar logisch denken een sprong kan maken, om de gewenschte conclusie ook vanuit andere gedachtengangen, dan die er eigenlijk heen voeren, te bereiken. Bovendien echter maakt deze overtuiging haar vaak onbillijk tegenover hen, die andere wegen volgen, dan zij zou wenschen.

Ziet slechts de schrille kleuren, waarin zij de gevolgen van de gebruikelijke methode van meetkunde-onderwijs schildert: in tegenstelling met de toekomstmethode laat de thans gebruikelijke handelwijze den mensch òf zonder eenigen steun van wetenschappelijke scholing tegenover de levensgebeurtenissen staan òf

ze leert hem, er op te reageeren op een wijze, waarvoor Mevrouw Ehrenfest, met dat eigenaardig gevoel van superioriteit, waarmee in onzen tijd intellectueele vrouwen zoo gaarne op het mannelijk geslacht neerzien, geen minder waardeerende qualificatie, dan „mannenlogica" kan vinden. Tusschen deze beide euvelen: niets aan hun leerlingen geven of doctrinairen kweeken, moeten de ongelukkigen, die de meetkunde nog in hoofdzaak volgens Euclides doceeren, blijkbaar hun keus doen.

Mevrouw Ehrenfest houde mij ten goede, wanneer ik een dergelijke voorsteling overdreven noem. Ik ben gaarne overtuigd, dat ook bij haar de practijk zachtmoediger zal zijn dan de theorie; maar blijkbaar beheerscht de theorie haar, wanneer zij schrijft en haar geschriften zijn het, die wij hier te beoordeelen hebben.

Een tweede punt, waarop ik mijn critiek niet weerlegd kan achten, is het volgende:

Erkennende, dat ontwikkeling van het voorstellingsvermogen bij het onderwijs in de Stereometrie aan niet-wiskundige leerlingen, voorzoover bereikbaar, zeer gewenscht is, had ik de meening verdedigd, dat deze ontwikkeling gaandeweg, in samenhang met den systematischen opbouw van de stereometrische kennis kan geschieden en dat dit ook de meest gewenschte weg is. Ik kan nu niet inzien, dat Mevrouw Ehrenfest in haar antwoord deze meening weerlegd heeft: immers, sprekende over de verlichting en de bevrediging, die men aan de leerlingen schenkt, wanneer men ze helpt, om het aanschouwelijke beeld van de figuraties, waarover de Stereometrie handelt, op te bouwen, verklaart zij categorisch, dat het te laat is, wanneer men met deze hulp komt midden in den systematischen cursus. Nu schrijft zij mij in deze woorden een andere meening toe, dan ik verkondigd had: ik wil niet met hulp voor de voorstelling komen *midden* in den systematischen cursus, maar ik wil *van den aanvang af* me overtuigen, dat bij iedere stelling, die bewezen wordt, een heldere voorstelling aanwezig is, en ik acht dan ook stoffelijke hulpmiddelen voor het vormen van deze voorstelling zonder voorbehoud aanbevelenswaardig. Maar bezwaren had ik tegen het bestudeeren van stoffelijke modellen van gecompliceerde ruimtevormen, *voordat* het systematische stereometrie-onderwijs een aanvang kan nemen; daarvan duchtte ik en ducht ik nog schade aan de exactheid van uitdrukking, aan de

strengheid van bewijs.[1]) Mevrouw Ehrenfest geeft opnieuw mijn meening niet geheel juist weer, wanneer zij mij steeds laat verlangen, dat de leerling logisch bevredigende stellingen zal kunnen uitspreken over dingen, die hij zich niet kan voorstellen. In het algemeen wil ik den onmiddellijken samenhang van het uitspreken der stelling en het aanwezig zijn der ruimtelijke voorstelling; ik voeg er echter dadelijk aan toe, dat er gevallen zijn, waarin ik het verlangen, dat haar zoo ongerijmd lijkt, werkelijk bezit en ik kan nog steeds niet inzien, waarom Mevrouw Ehrenfest niet kan toegeven, dat men iets meetkundigs volkomen kan begrijpen, zonder dat er een heldere voorstelling aanwezig is. Ik wil daarom aan de voorbeelden, die ik daarvoor reeds uit verschillende gebieden heb aangehaald, nog een zeer eenvoudig, aan het H.B.S.onderwijs ontleend, toevoegen.

Gevraagd wordt, op welke wijze drie vlakken A, B en C ten opzichte van elkaar gelegen kunnen zijn. Men merkt nu b.v. op, dat er twee mogelijkheden zijn: de vlakken A en B snijden elkaar volgens een rechte *l* of ze snijden elkaar niet. In het eerste geval zal de rechte *l* òf het vlak snijden in een punt O, òf er evenwijdig aan loopen òf er in liggen. Wanneer men nu, weer de eerste van deze mogelijkheden vervolgend, concludeert, dat drie vlakken dus zoo gelegen kunnen zijn, dat ze één punt gemeen hebben, spreekt men dan niet met volledig juist begrip een correcte stelling uit, *ook als men zich geen drievlakshoek kan voorstellen?* [2]) Moet men

---

[1]) Ter voorkoming van misverstand moge hierbij worden opgemerkt, dat het toebrengen van deze schade door Mevrouw Ehrenfest niet wordt beoogd; integendeel: zij beschouwt immers juist als een der essentieele voordeelen van haar methode, dat het na den propaedeutischen cursus mogelijk zal zijn, exactheid van redeneering met meer succes na te streven, dan bij de gangbare methode geschieden kan. Door deze doelstelling kan zij echter niet voorkomen; dat *in* den propaedeutischen cursus dingen zullen gebeuren, dit uit wiskundig oogpunt niet toelaatbaar zijn: o.a. zullen de leerlingen bij het spreken over de ruimtevormen, die zij onder oogen krijgen, allerlei wiskundige termen gebruiken, zonder in staat te zijn, onder woorden te brengen, wat ze daaronder verstaan.

[2]) Het spreekt wel vanzelf, dat het ontstaan van die voorstelling daarna zoo krachtig mogelijk zal moeten worden bevorderd. De bedoeling van het bovenstaande was slechts, aan tet toonen, dat men

werkelijk reeds eens aan een stoffelijk ding het bestaan van dit geval hebben opgemerkt, op straffe van door Mevrouw Ehrenfest ingedeeld te worden bij de categorie van de rekenaars zonder physische intuïtie? En is het niet voldoende, wanneer men, eenmaal overtuigd, dat er een drievlakshoek moet bestaan, eens rond gaat zien, of men die ook ergens stoffelijk verwezenlijkt vinden kan?

En wanneer men, doorgaande met de boven aangevangen redeneering, de vijf gevallen afleidt, die zich bij de onderlinge ligging van drie vakken kunnen voordoen, gaat men dan niet logischer, systematischer, strenger, kortom wiskundiger te werk, dan wanneer men aan stoffelijke modellen van lichamen gaandeweg de verschillende mogelijkheden opmerkt? Geeft dit opmerken ooit de zekerheid, dat er niet meer dan vijf gevallen zijn?

Geeft in het algemeen het zintuigelijk waarnemen ooit het dwingende gevoel van apodictische zekerheid en volkomen exactheid, dat den stellingen der Euclidische Meetkunde, in spijt van alle sinds Kant ontstane mathematische en physische inzichten, *voor het mathematisch ongeschoolde denken*, nog steeds aankleeft?

Hiermee kom ik echter vanzelf tot een antwoord op de vraag, die Mevrouw Ehrenfest stelt over mijn bedoeling met de uitdrukking „zekerheid van de grondslagen der Euclidische Meetkunde". Natuurlijk bedoel ik hier de subjectieve zekerheid, de evidentie, die deze grondslagen voor het wiskundig ongeschoolde denken bezitten en die zoo groot is, dat er een belangrijke mate van mathematisch-psysische ontwikkeling vereischt wordt, om te kunnen inzien, dat met die zekerheid de objectieve realiseering, de physische toepasbaarheid niet gepaard behoeft te gaan. Inderdaad, er is een „véritable dislocation intellectuelle" noodig, om met Painlevé te spreken [1]), om te leeren twijfelen aan de hypothese van Kant, dat de Euclidische driedimensionale ruimte de noodzakelijke vorm is, waarin het menschelijk intellect de uitwendige ervaring ontvangt en nog steeds bezit het ongeschoolde denken de axioma's der Euclidische Meetkunde als door een soort instinct, dat men, door zich te beroepen op het

zonder de ruimtelijke ervaring, die Mevrouw Ehrenfest in den Propaedeutischen cursus wil verschaffen, door redeneering alleen tot de overtuiging van het bestaan van een drievlakshoek komen.

[1]) P. Painlevé, Les Axiomes de la Mécanique. Examen critique. p. 5. Paris, 1922.

voortdurende contact met de vaste lichamen, wel kan trachten te verklaren, maar dat men daarmee niet wegpraat.

Maar het zijn niet deze axioma's alleen, gaat Mevrouw Ehrenfest voort, die evident voor hem zijn; tal van stellingen uit het begin der Euclidische meetkunde vindt hij even vanzelfsprekend, als wat hem als axioma wordt voortgezet; bovendien is het stelsel der axioma's, dat men hem geeft, niet volledig. Zoo worden dus sommige evidente feiten heelemaal niet uitdrukkelijk vermeld, andere als axioma ingevoerd en weer andere zullen dan ineens bewezen moeten worden?

Inderdaad zoo is het en geen voorstander van de klassieke methode kan ontkennen, dat hier, theoretisch gesproken, de zwakke plek van het systeem ligt. De vraag is nu echter maar, of de handelwijze van Mevrouw Ehrenfest deze onoverkomelijke moeilijkheid beter omzeilt dan de klassieke methode dat doet en deze vraag zou ik voorloopig nog ontkennend willen beantwoorden.

Weliswaar moet men haar toegeven, dat het zonder bewijs aannemen van stellingen, wanneer dit geschiedt als voorloopige maatregel en onder uitdrukkelijke vermelding, dat het bewijs opzettelijk achterwege wordt gelaten, niet onexact mag worden genoemd. Het is vaak ongetwijfeld beter, iets niet te bewijzen, dan door een schijnbewijs een illusie van exactheid te wekken. Maar uit deze overweging volgt alleen een argument voor het weglaten van bewijzen op grond van onvoldoende strengheid en men kan er geen enkel motief aan ontleenen, om nu ook de wel exacte bewijzen, die in den opbouw der meetkunde voor tal van eenvoudige en voor ieder dadelijk plausibele stellingen worden geleverd, te verbannen.

Dit laatste echter wil Mevrouw Ehrenfest wel; zij toch zoekt haar criterium voor het al of niet geven van een bewijs in de vraag, of de stelling niet dan al voor alle leerlingen evident is en ze motiveert dit door de bewering, dat de leerlingen voor het bewijs van een evidente stelling geen belangstelling kunnen hebben, dat ze er hun gedachten niet op kunnen concentreeren, omdat ze niet in staat zijn, aan de stelling zelve te twijfelen. Het is dit psychologische argument, meer dan het logische, dat ik boven vermeldde, dat haar, ook na den propaedeutischen cursus, zulk een ingrijpende verandering in het meetkunde-onderwijs doet eischen.

Dwingende kracht gaat er echter van dit argument niet op mij uit. De eisch van het leveren van een bewijs beteekent heelemaal niet

noodzakelijk, dat men twijfel aan de juistheid van de stelling verlangt en dat men dien twijfel door het bewijs wil wegnemen. Men beoogt er slechts mee (wat Mevrouw Ehrenfest natuurlijk ook beoogt, maar wat zij voor de evidente stellingen pas in den axiomatischen cursus wil verwezenlijken), het logische verband tusschen de bedoelde stelling en andere, zij het dan ook niet meer evidente, dan toch eenvoudigere stellingen, op te sporen en, vooral, den leerling eenvoudig oefenmateriaal te verschaffen voor het leeren hanteeren van de verschillende meetkundige bewijsvormen, opdat hij niet, bij het ontmoeten van niet evidente stellingen, tegelijk met de moeilijkheid van de stelling, zijn technische onbeholpenheid in het bewijzen zal hebben te overwinnen.

Ik kan ook niet toegeven, dat de leerlingen zóó weinig belangstelling kunnen hebben voor dergelijk werk, dat ze, ook bij goeden wil, hun belangsteling niet daarop zullen kunnen concentreeren; mocht het in een enkel geval voorkomen, mocht ook eens een leerling klagen over het bespottelijke, dat hij dingen moet bewijzen, die „je toch zoo ziet", dan zou mij dit niet zoo heel erg imponeeren. Een kind moet ten slotte ook leeren, zich tot gedachtenconcentratie te dwingen en het is niet altijd noodig, dat het het waarom beseft van de dingen, die men het laat doen.

Resumeerende moet ik verklaren, dat ik nog steeds niet overtuigd ben, dat de klassieke methode van meetkunde-onderwijs werkelijk aan zoo groote bezwaren onderhevig is, als Mevrouw Ehrenfest er tegen aanvoert en dat ik mijn bedenkingen tegen haar plannen nog niet weerlegd kan achten.

En waar zij haar betoog eindigt met de verklaring, dat ons meeningsverschil ten slotte berust op een verschil in ideaal, daar zou ik mijn antwoord willen besluiten met dat tot op zekere hoogte in twijfel te trekken. Beiden zullen we toch wel het doel hebben, om de aan onze zorgen toevertrouwde leerlingen in te leiden in het gebouw der Euclidische Meetkunde, een gebouw van zoo groote schoonheid en, ondanks de hier en daar wat wankele fundamenten, van zoo harmonische soliditeit, dat het iederen mensch geestelijk goed moet doen, daarin eenigen tijd te verwijlen.

Maar wellicht beschouwt Mevrouw Ehrenfest de gidsen, die hun bezoekers op de traditioneele wijze rondleiden, niet als de ware vertolkers der wiskundige schoonheden; wellicht weet zij te wijzen op fijne eigenaardigheden, die de anderen achteloos voorbij gaan.

In dat geval is haar doel inderdaad van andere, ja zelfs van hoogere orde, dan het onze. Dan echter moge hier de uitnoodiging tot haar gericht worden, op de uiteenzetting van haar methode nu ook een nadere schildering van dat hoogere doel te laten volgen.

Oisterwijk, Januari 1925.

Dr. E. J. Dijksterhuis. Val en Worp. Een bijdrage tot de Geschiedenis der Mechanica van Aristoteles tot Newton. (466 blz.). P. Noordhoff, Groningen 1924. Geb *f* 8.25, voor inteekenaars op het N. T. v. W. en Chr. Huygens *f* 6.75.

De schrijver begint zijn Voorrede met de woorden: „Het werk, dat hiermede het licht ziet, stelt zich ten doel, door een studie van de theorieën, die in het tijdvak van Aristoteles tot Newton naar aanleiding van de val- en worpbewegingen zijn opgesteld, een bijdrage te leveren tot de kennis van de wordingsgeschiedenis van de grondslagen van het moderne physische denken, zooals deze in Newton's Leges Motus zijn geformuleerd. Het is ontstaan uit de overtuiging, dat het voor het verkrijgen van een helder inzicht in de beteekenis dier grondslagen onontbeerlijk is, zoo nauwkeurig mogelijk de geleidelijke ontwikkeling na te gaan, als welker resultaat zij optreden. De groote omvang, dien zulk een onderzoek, in volkomen volledigheid uitgevoerd, zou verkrijgen, was aanleiding tot het opleggen van de beperking, die in de keuze van het onderwerp tot uiting komt."

Het spreekt wel vanzelf, dat de schrijver de beperking, die hij zich heeft opgelegd, niet voortdurend heeft kunnen handhaven; het werk geeft, en dit was noodzakelijk, belangrijk meer dan de titel aangeeft. In de periode der ontwikkeling, die ongeveer bij Galilei begint, kan eigenlijk nauwelijks meer van een afzonderlijk val- en worpvraagstuk sprake zijn en komt de schrijver vanzelf tot een bespreking van het mechanisch denken in het algemeen gedurende het tijdperk, dat van Galilei loopt tot Newton. In den tijd vóór Galilei kon men van een afzonderlijk val- en worpvraagstuk spreken, en dit nog splitsen in een kinematisch en een dynamisch gedeelte. Maar ook hier dwingt de duidelijkheid voortdurend tot opheffing der genoemde beperking.

Wat Aristoteles leert omtrent de val- en de worpbeweging der lichamen, kan niet begrepen worden dan wanneer men bekend is

geworden met de gronddenkbeelden der Aristotelische physica: de onderscheiding van Potentia en Actus, die van Materie en Vorm, de samenstelling der stoffen uit de vier elementen en de tendenzen tot beweging, aan elk dier elementen eigen, en waarmede in verband staan de eigenschappen van de zwaarte en de lichtheid der stoffen. Zelfs is een uiteenzetting van de astronomische zijde van het stelsel van Aristoteles (het geocentrische stelsel in zijn meest consequenten vorm) noodig, omdat volgens A. vallende lichamen naar de aarde bewegen, alleen dáárom, dat de aarde het middelpunt van het heelal bevat. De schrijver bespreekt deze onderwerpen in beknopten vorm zonder aan de duidelijkheid te kort te doen, om eerst daarna te komen tot de „valwet" van A. Hier licht hij toe, dat deze en volgende valwetten op ons een vreemden indruk maken, doordat het ideale verschijnsel van den val in het vacuum eerst in den nieuweren tijd voor den dag komt; bij de oudere schrijvers is steeds sprake van een val in een medium. Volgens A. is een vacuum zelfs onmogelijk; hiervan geeft hij meerdere „bewijzen".

Hoe moeilijk de taak is, die de historicus zich oplegt, blijkt o.a., wanneer de schrijver verschillende interpretaties bespreekt, die van de valwet van Aristoteles gegeven zijn. Er blijkt ruimte te zijn voor velerlei uitlegging. Sommigen gaan zoo ver te beweren, dat Aristoteles de stationnaire valbeweging op het oog heeft, die in een weerstandbiedend medium op den duur ontstaat. De schijver blijkt echter zelf op het standpunt te staan, „dat men zich bij de beoordeeling van de mechanische theorieën van Aristoteles voor overschatting hoeden moet, en dat men A. in physische en mathematische kwesties meer zoo interpreteeren moet als met het natuurwetenschappelijke ongeschoolde denken van onzen tijd overeenkomt, dan op de wijze, die voor den mathematisch ontwikkelde de meest voor de hand liggende is".

De mechanica van Aristoteles kent ook een wet, die als pendant kan gelden van Newton's grondwet $K = ma$, maar voor A. bestaat er geen verband tusschen deze dynamische wet en de valwet. Althans niet naar het oordeel van den schrijver, die mededeelt, dat hij op dit punt met den bekenden historicus Duhem van meening verschilt.

Aristoteles wist, dat de valbeweging versneld was; op een verklaring van deze snelheidstoename gaat hij niet uitdrukkelijk in; in de Scholastiek schrijft men hem algemeen de meening toe, dat de zwaarte van een lichaam gedurende den val toeneemt.

Wat de worpbeweging betreft: om te verklaren, hoe een voortgeworpen lichaam in beweging kan blijven, wanneer de hand, die het wierp, er niet meer mede in aanraking is, onderstelt Aristoteles, dat het het omringend medium is, dat de voortgeworpen lichamen in beweging houdt.

Na deze uiteenzetting van de denkbeelden van Aristoteles gaat de schrijver na, hoe zijn opvattingen zijn aangevuld of bestreden door zijn voornaamste Grieksche commentatoren. We lezen dan o.a., dat reeds Philoponos op empirische wijze de onjuistheid van de valwet van Aristoteles heeft aangetoond, terwijl men dit als een der grootste verdiensten van Galilei pleegt te beschouwen. Voorts vinden we bij Philoponos het denkbeeld van een onstoffelijk kinetisch vermogen, welk denkbeeld o.a. een belangrijke rol heeft gespeeld in de ontwikkeling van het traagheidsprincipe.

Hierna worden „Val en worp in de Scholastiek" besproken. Tot voor korten tijd meende men, dat de denkbeelden van Aristoteles een onbeperkte en ononderbroken heerschappij over het wetenschappelijk denken van West-Europa hebben gevoerd tot aan het optreden der mechanische causaliteitsleer. Onderzoekingen van Duhem hebben echter aangetoond, dat in de 14de eeuw te Parijs een groep philosophen werkzaam is geweest, die zich op belangrijke punten van Aristoteles heeft losgemaakt en wier eigen theorie de grondslagen bevatte, waarop later door Galilei, Huygens en Newton de mechanica zou worden opgebouwd. Deze denkbeelden hebben grooten invloed gehad, zijn echter niet algemeen aanvaard; in het bijzonder werd door de Italiaansche universiteiten in de 15de eeuw een reactie ten gunste van Aristoteles in het leven geroepen; en het is tegen deze reactie, dat Galilei te strijden heeft gehad. Van de Parijsche school worden dan drie hoofdfiguren behandeld. Merkwaardig is o.a. dat één hunner Nicole Oresme, door middel van zijn grafieken (Duhem ziet in hem den schepper der Analytische Meetkunde) den regel heeft afgeleid, die bij de eenparig versnelde beweging den weg als functie van den tijd bepaalt, dat hij het begrip van momentane snelheid heeft en van versnelling, zonder (gelijk vanzelf spreekt, indien we letten op het stadium, waarin de wiskunde in dien tijd verkeert) die begrippen juist te kunnen definieeren. Van het grootste belang is bij hen de theorie van den „impetus", een begrip, waarvoor in onze mechanica geen plaats is. Evenals Aristoteles meende nl. de Parijsche school, dat voor

het onderhouden van een beweging een voortdurende oorzaak noodig is. Terwijl Aristoteles echter die oorzaak buiten het lichaam zoekt, zoekt de Parijsche school haar in het lichaam zelf; met den impetus bedoelde men iets als een inwendig bewegend vermogen. Hoewel op het eerste gezicht ook deze theorie met ons traagheidsbeginsel in lijnrechten strijd schijnt, blijkt toch bij nadere beschouwing het begrip impetus den kiem van ons traagheidsbeginsel in zich te bevatten.

Vervolgens komt „Val en Worp in de Italiaansche mechanica vóór Galilei" aan de orde. Uitvoerig wordt de beteekenis van Leonardo da Vinci, voor zoover dat thans reeds kan gebeuren, voor de mechanica geschetst. De schrijver spreekt het vermoeden uit, dat wanneer eenmaal een juist beeld van da Vinci's eigen werk zal zijn verkregen, de waardeering aanzienlijk lager zal zijn dan de thans gangbare. We zien, dat da Vinci de theorie der Parijsche scholastici ten deele aanvaardt, maar dat hij met de groote meerderheid zijner tijdgenooten bevangen bleef in verschillende Aristotelische dwalingen. Ook hier blijkt de meening van den schrijver belangrijk af te wijken van die van Duhem.

In de 16e eeuw brengt het Humanisme de uitgave van werken van Grieksche wiskundigen mede en als gevolg daarvan begint thans de invloed van Archimedes te werken. In de eerste plaats verdreef de hydrostatische theorie van Archimedes de oude theorie van zwaarte en lichtheid. In niet mindere mate is van belang, dat de mathematiseering der natuurwetenschap, die het werk van Archimedes kenmerkte, thans navolging vindt. Een aanzienlijken vooruitgang treffen we reeds aan bij Benedetti, die als een voorlooper van Galilei is te beschouwen. Bij hem vinden we de stelling (met een overtuigend bewijs), dat in vacuo twee lichamen van dezelfde stof zich met gelijke snelheden zouden bewegen.

Omtrent Galilei begint de schrijver met de opmerking, dat de gangbare opvatting omtrent de beteekenis van Galilei voor de mechanica volstrekt onjuist is; deze meening is reeds door anderen uitgesproken. Hij heeft de fundamenteele wetten der moderne mechanica niet geformuleerd, en waar hij dynamisch redeneert, vervalt hij tot in de laatste jaren van zijn leven in de principieele fouten van Aristoteles. Schrijver verdedigt deze conclusie op zorgvuldige wijze door na te gaan, wat Galilei in de verschillende perioden van zijn leven, in het bijzonder op het gebied der val- en worpverschijn-

selen, heeft verricht. Daarbij blijkt o.a., dat Galilei nimmer tot een scherpe onderscheiding is gekomen van de twee invloeden, die een lichaam, in een medium vallend, daarvan ondergaat: den konstanten opwaartschen druk en den met de snelheid veranderenden weerstand. Voorts is de door Galilei gegeven valwet, bij verwaarloozing van den weerstand, juist, maar de schrijver zet uiteen, dat hieruit geenszins behoeft te volgen, dat hij de fundamenteele dynamische fouten van Aristoteles overwonnen heeft; en hij laat zien, welke resultaten overeenstemmend zijn in de mechanica van Aristoteles en die van Newton. Men heeft ook niet het recht, hem het traagheidsinzicht toe te schrijven, al schijnt hij er op sommige plaatsen dicht toe te naderen, en al heeft hij dan ook het allervoornaamste aandeel gehad in de ontwikkeling van dat denkbeeld. De groote beteekenis van Galilei ligt naar schrijver's meening in zijn kinematisch werk; hij heeft zich de streng afgebakende taak opgelegd, zoo exact mogelijk de kinematische wetten op te stellen voor den vrijen val, de valbeweging op hellende vlakken en den worp.

Terwijl alle verdere onderzoekingen over val en worp verricht zijn in aansluiting aan, in strijd tegen, althans in bekendheid met de leer van Galilei moet een afzonderlijke plaats worden ingeruimd aan de bespreking van den arbeid van den Middelburgschen arts Isaac Beeckman, die onafhankelijk van Galilei werkte. In 1905 is het z.g. Journaal, waarin zijn aanteekeningen waren verzameld, teruggevonden, waardoor veel merkwaardigs aan het licht gekomen is. Zoo reeds aanstonds zijn traagheidsprincipe en het feit, dat hij met behulp van dit principe tot het inzicht komt, dat een standvastige kracht een eenparig versnelde beweging ten gevolge heeft. Men heeft deze afleiding, naar schrijvers meening ten onrechte, na de verschijning van het „Journaal” aan Descartes toegekend.

Wij meenen den schrijver in zijn verdere uiteenzetting van de ontwikkeling der gronddenkbeelden van Galilei tot Newton niet te moeten volgen, en zullen na deze vluchtige schets, die eenigszins een antwoord geeft op de vraag, „wat” in het werk van Dr. Dijksterhuis besproken wordt, slechts een oogenblik stilstaan bij het „hoe”. En dan moet dadelijk geroemd worden de zeer grondige wijze, waarop de schrijver is te werk gegaan. Niet alleen is hij zelf, zoover dat eenigszins mogelijk was, tot de oorspronkelijke bronnen teruggegaan, maar hij stelt ook den lezer in de gelegenheid, in ruime mate met die bronnen kennis te maken. Zijn streven naar exactheid

brengt mede, dat hij alle bewijsplaatsen in de oorspronkelijke taal citeert; de in den tekst opgenomen Grieksche, Latijnsche en Italiaansche citaten zijn van een Hollandsche vertaling voorzien.

We deden reeds uitkomen, dat de schrijver op meerdere gewichtige punten met andere geschiedschrijvers van meening verschilt. Daarbij blijkt echter steeds die afwijkende meening op een zoo grondig mogelijk onderzoek gebaseerd te zijn, en spreekt zoowel de vorm als de inhoud der argumentatie voor volledige objectiviteit. We meenen te mogen zeggen, dat het tot stand komen van dit werk het gevolg is van een gelukkig samentreffen van mathematischen en historischen zin.

Wij durven geen vermoeden uitspreken over de waarde, die dit werk voor de geschiedenis der natuurwetenschappen zal blijken te bezitten. Dat wij nochtans meenden, ditmaal met een korte bespreking niet te kunnen volstaan, vindt zijn oorzaak in de groote beteekenis, die wij aan het verschijnen van dit werk hechten voor het onderwijs in mechanica en natuurwetenschap bij het voorbereidend hooger onderwijs.

Aan het begin dezer bespreking citeerden we de woorden, waarmede de schrijver zijn overtuiging uitspreekt omtrent de beteekenis van het historisch onderzoek voor de verheldering der denkbeelden. We meenen, dat op dit punt wel niemand met den schrijver van meening zal verschillen. Het „helder inzicht in de beteekenis der grondslagen" nu is juist van het meeste belang voor hen, die de beginselen der genoemde wetenschappen aan jeugdige leerlingen hebben te onderwijzen. Zij moeten er goed van doordrongen zijn, dat die grondbeginselen geen vanzelf sprekende zaken zijn; de eeuwenlange worsteling, waaraan die grondslagen hun bestaan danken, leert het geheel anders. En dat diezelfde grondbeginselen slechts relatief „waar" zijn, in zooverre, dat zij, zoover wij zien, aan de voorwaarden voldoen, zonder innerlijke tegenspraak te zijn, en (indien wij van de onderzoekingen van den allerlaatsten tijd afzien) geen strijdigheid opleveren met de wereld onzer ervaring. Hoe beter wij van deze zaken doordrongen zijn, des te beter zullen wij de moeilijkheden begrijpen, waarmede onze leerlingen te strijden hebben bij de eerste schreden op het pad der wetenschap; des te beter zullen wij leeren berusten in de schijnbaar geringe resultaten, die wij hier ondanks groote inspanning bereiken.

Wij eindigen met het uitspreken van den wensch, dat dit mooie

werk in handen van vele docenten en aanstaande docenten zal komen en tevens met een woord van hulde aan den ondernemenden uitgever.

H. J. E. B.

ONS STANDPUNT IN ZAKE DE BEOORDEELINGEN VAN SCHOOLBOEKEN.

Uit brieven:

„En vooral uw plan om een soort tribunaal voor wiskundeleerboeken op te richten (op zich zelf zeer toe te juichen) kan tot veel persoonlijke geprikkeldheden aanleiding geven. Intusschen vertrouw ik, dat het U zal gelukken, ook deze moeilijkheden te boven te komen".

„Voor de wiskundige kritiek, die maar al te veel heeft gezwegen in ons land, kan het veel nut hebben. Wordt een kritische bespreking van alle wiskundewerken zonder onderscheid van schrijver of uitgever opgenomen, mits voldoende aan de altijd te stellen eischen omtrent vorm en inhoud? Er zijn ook in onze „goede" leerboeken zoo veel leemten en slordig bewerkte onderdeelen der theorie".

Gaarne geven we in het openbaar de antwoorden hierop.

Het is dringend noodig, minder dat op goede leerboeken wordt gewezen dan wel, dat het volle licht valt op allerlei minderwaardig werk; dat de schrijvers dier werken zich daardoor geprikkeld zullen gevoelen is wel mogelijk, maar dat zal ons niet weerhouden om slecht te noemen, wat slecht, om duf te noemen, wat duf is, om verouderd te noemen, wat in de oude doos thuis behoort en zulks geheel ervan onafhankelijk of het werk veel of weinig gebruikt wordt, noch door wien het geschreven, noch bij welken uitgever het verschenen is.

Natuurlijkerwijze zal de beoordeeling van werken, uitgegeven door de firma Noordhoff, die zeer zorgvuldig laat nagaan, of een haar ter uitgave aangeboden werk de uitgave waard is, gemiddeld gunstiger uitvallen dan die van werken uitgegeven door een firma, die al het haar aangebodene zonder onderzoek aanvaardt.

Wanneer ons gevraagd wordt naar aanbevelenswaardige werken op wiskundig gebied (geen schoolboeken), dan zal *natuurlijk* alleen de hoedanigheid van het boek ons oordeel bepalen. Dat wij meestal werken van de firma Noordhoff zullen aanbevelen vindt

zijn oorzaak in het feit, dat op zeer enkele uitzonderingen na, alle in Nederland verschenen wiskundige werken door deze firma zijn uitgegeven.

J. H. S.
P. W.

W. Reindersma, Beknopt Leerboek der Vlakke Meetkunde, 2e druk. Groningen en Den Haag, J. B. Wolters' U. M. 1924, geb. *f* 3.90.

Men krijgt bij de lezing van dit boek den indruk, dat de schrijver getracht heeft de moeilijkheden, die jeugdige leerlingen met de Meetkunde hebben, te verminderen door het gebruik van een huiselijken stijl en een gemeenzamen toon. De lezer wordt voortdurend met „je" aangesproken. Voor een strenge formuleering der wiskundige beweringen is deze wijze van doen allerminst bevorderlijk, en de stiptheid is dan ook telkens aan de gemakkelijkheid opgeofferd.

De schrijver gebruikt, meer axioma's dan gewoonlijk geschiedt en vermeldt zelfs uitdrukkelijk als axioma VII, dat een rechte lijn het platte vlak verdeelt in twee deelen, zoodanig dat, wanneer een punt van het eene deel verbonden wordt met een punt van het andere deel; de verbindingslijn de deellijn snijdt, maar de hierdoor gewekte verwachting, dat de verdere behandeling beter zal zijn dan in andere schoolboeken wordt spoedig op afdoende wijze beschaamd, als men op bladzijde 50 iets leest over cirkels, die elkaar raken, terwijl eerst op bladzijde 184 wordt medegedeeld, wat hieronder moet worden verstaan. Of als men een scherphoekigen driehoek bepaald ziet als een driehoek, waarvan de grootste hoek scherp is, alsof iedere driehoek een grootsten hoek heeft. Overigens treft men de slordigheden, die algemeen gebruikelijk zijn, ook hier aan; als voorbeeld noem ik de onjuiste bewering dat de bissectrix van een buitenhoek van een driehoek de overstaande zijde snijdt.

Het is ondoenlijk, en ook onnoodig, de tallooze fouten op te noemen, alleen op een bijzonder sterk staaltje wil ik even ingaan. De schrijver zegt op bladzijde 240: „Een lijn noem ik eenzijdig gebroken, wanneer elk der stukken, hoever ook verlengd, enkel de beide aangrenzende stukken snijdt." Uit het vervolg blijkt echter,

dat hij onder een eenzijdig gebroken lijn verstaat, wat er gewoonlijk onder verstaan wordt: een aaneenschakeling van n lijnstukken, met de eigenschap, dat het $(p-1)$ste en het $(p+1)$ste aan denzelfden kant liggen van de lijn, waarvan het p-de een deel is ($p = 2, 3, \ldots, n-1$). Het is heel gemakkelijk, een trapvormige gebroken lijn te teekenen, waarvan de lijnstukken met even rangnummer evenwijdig zijn, en die met oneven rangnummer ook, zulk een lijn voldoet aan de door den schrijver genoemde voorwaarde, en is toch allerminst eenzijdig gebroken; omgekeerd zijn er eenzijdig gebroken lijnen, die een spiraalvormige gedaante hebben, en dus aan bedoelde voorwaarde niet voldoen. De schrijver is hier blijkbaar vervallen in de gewone fout, geen bewijzen te zoeken voor zijne beweringen, indien die bewijzen te moeilijk zouden worden om in een schoolboek te worden opgenomen. Had hij wel strenge redeneeringen gehouden met het begrip eenzijdig gebroken lijn, dan zou hij bemerkt hebben, dat juist dit vermogen van eenzijdig gebroken lijnen, om zich spiraalvormig op te rollen, ze tot tamelijk onhandelbare wiskundige wezens maakt.

De schrijver overwege, in een mogelijken volgenden druk de dwaze taalfout: „*Laten* AB en CD de lijnen zijn, enz." (blz. 108) te verbeteren.

Het is mij aangenaam, in dit boek althans iets te kunnen waardeeren, iets waarin het zich van andere schoolboeken onderscheidt, namelijk de aandacht, die gewijd wordt aan de geschiedenis der meetkunde. Er zal natuurlijk wel verschil van meening bestaan over de waarde, die de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen voor de leerlingen van het M. O. en V. H. O. heeft, maar ik meen, dat velen het aardige hoofdstuk XXX, Uit de Geschiedenis der Vlakke Meetkunde, met genoegen zullen lezen, en dat het den leerlingen veel belang zal inboezemen. Aan een behoorlijk samenhangend overzicht heeft de lezer veel meer dan aan de vermelding van enkele op zich zelf staande namen en jaartallen, die hem heel weinig zeggen.

J. H. Schogt.

C. A. van Beek en W. A. C. van Heek. Algebra voor onderwijzersopleiding en hoofdacte-studie. J. B. Wolters' U. M. 1924. 140 blz. *f* 1.90.

Dit boek bevat een minimum aan theorie; hoe die is, ziet men aan het volgende; (schuin gedrukt en vet van de schrijvers).

Blz. 7. „§ **6.** *Volgorde der bewerkingen.* Moeten in een vorm achtereenvolgens verschillende bewerkingen worden uitgevoerd, dan is de volgorde daarvan niet willekeurig. Eerst komt altijd machtsverheffen aan de beurt, daarna vermenigvuldigen, dan deelen, vervolgens worteltrekken en ten slotte optellën en aftrekken. Deze laatste twee worden steeds uitgevoerd in de volgorde, waarin ze van links naar rechts staan aangegeven."

Lezer, probeer maar eens met $a : b - c^3 \sqrt{d}$. De schrijvers begrijpen er zelf blijkbaar niets van.

Blz. 10. „§ **11.** $3x + 4x$ beteekent: $x + x + x$ te vermeerderen met $x + x + x + x$. In het geheel krijgen we dan $7x$. Evenzoo is $6a^2 + 2a^2 = 8a^2$. Uit deze voorbeeldjes blijkt, dat *alleen de coëfficiënten behoeven te worden opgeteld.*"

Blz. 12. „§ **13.** $\mathbf{7a - 4a = 3a}$. *Ook bij de aftrekking moeten* evenals bij de optelling *de getallen gelijksoortig zijn.*" De schrijvers verwarren hier de mogelijkheid van optelling met de mogelijkheid van de toepassing der distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging.

Blz. 15. § **19. Een product wordt tot 'n macht verheven, door iederen factor tot die macht te verheffen."**

Blz. 16. „§ **21. Een veelterm wordt met een getal vermenigvuldigd door iederen term met dat getal te vermenigvuldigen."**

Van dit slag staan er meerdere in! Later wordt deze laatste „stelling" overgenomen voor de algebraïsche getallen (blz. 25 § 35) en dan vindt men:

Blz. 25. „§ **37.** Het product van twee veeltermen bijv. $(a + b) \times (a - b + c)$ wordt gevonden door herhaalde toepassing van § 35" (dus van § 21 hierboven). Ik zie er geen kans toe.

Zoo zijn veel meer fouten aan te wijzen; het geheele werkje staat ver beneden de goede boekjes voor M.U.L.O. Het is dringend noodig, dat a.s. onderwijzers degelijk les in Wiskunde krijgen; de schrijvers van het bovengenoemde boekje maken er zelf blijkens hun boek al heel weinig van. En dan nog wegwijzer willen zijn voor anderen!

De uitvoering van het boekje staat in scherpe tegenstelling met den inhoud.

W.

Dr. W. F. C. Arndt, Wiskundige Terme, Engels—Afrikaans. Nasionale Pers, Bloemfontein.

Hieronder schrijf ik een deel van het voorwoord over.

„Ook op die gebied van hoër onderwys ondervind mens, dat studente nuwe begrippe beter en veel gouer verstaan, as sodanige in hulle moedertaal uiteengezet word. Maar, om Wiskunde in Afrikaans te kan doseer is dit noodig om 'n Afrikaanse terminologie te soek en te skep. Gedurende my dienstijd het ek vir my eie gebruik 'n lysie van wiskundige terme opgestel, maar die aantal woorde daarin het so groot geword, dat die gedagte by my opgekom het om ook ander mense uit my werk voordeel te laat trek.

Die verskyn van hier die lys in druk het meer as een doel: eerstens, kollega's, studente en skoliere sal dit sonder twyfel by hulle werk van nut vind; twedens, dit sal hoop ek — veel aanvallende, gesonde kritiek uitlok, sodat binne 'n kort tyd — miskien deur 'n kommissie van vakmanne — een Afrikaanse Wiskundige Terminologie kan vasgestel word, o.a. met die gevolg, dat skoliere en studente geen moeilikheid by eksamens of by stafverandering sal ondervind nie.

By die vertaling van wetenskaplyke terme was my beginsel om die internasionale benaming, in Afrikaanse vorm, te behou en dan, waar moontlik, een Afrikaanse woord by te voeg, omdat die Afrikaner hierdie beter en gouer begryp. So ver as moontlik het ek vermy om Afrikaanse terme self te maak, maar het eers ondersoek, of sodanige nie al gebruikelik is nie, en dan, of daar nie goeie Nederlandse vertalings bestaan, wat sonder beswaar in die Afrikaanse taal kan overgeneem word nie".

Daarna nog een en ander omtrent den inhoud, de medehelpers, een verzuchting over de Engelsche maten en gewichten en een verzoek om critiek en hulp tot verbetering.

Het woordenboekje telt een 40 bladzijden elk met twee kolommen met Engelsche woorden uit Wiskunde, ook de toegepaste, Sterrekunde, Landmeting, Natuurkunde en eenige uit de Handelswetenschappen, b.v.

acute scherp
adjacent angle newehoek
affix of $x + iy$ beeldpunt
force of buoyancy opwaartse druk
casting out the nines negeproef
circle of curvature kromtesirkel

conic-section kegelsnee
depth of focus brandpuntsafstand.

De samensteller, die hoogleeraar is in de Wiskunde aan de Hoogeschool te Bloemfontein, heeft zooveel mogelijk Nederlandsche woorden gebruikt voor wiskundige begrippen, ook voor die, welke bij ons nog al veel met vreemde worden aangeduid. De mogelijkheid daartoe bestaat voor het Nederlandsch; bij mijn weten niet voor de talen van de ons omringende volken, waar men bijna zonder uitzondering de woorden heeft ontleend aan het Grieksch en Latijn.

Het zou misschien zijn nut kunnen hebben ook voor ons land zoo'n lijst te maken b.v.:

analyse voorbereiding; (bij werkstukken).
constructie uitvoering
discussie bespreking
parallelepipedum blok
respectievelijk opvolgend.

„C_n^0 moet worden *geïnterpreteerd als 1*" zou ik willen lezen: „moet worden *aangeslagen als 1*" dat is Nederlandsch en geeft de beteekenis veel beter aan.

Nu weet ik wel, dat analyse niet, vertaald, oplevert voorbereiding, doch ontbinding, maar ik vraag, wat duidelijker is voor onze jongens en welk woord de bedoeling scherper aangeeft. Er is echter een bedenking: schrijvers van leerboeken zullen het groote vreemde woord voor *blok* niet op verschillende wijzen fout kunnen schrijven, zooals de heer Macalester Loup in het „Weekblad" opmerkte, noch in de gelegenheid zijn om aldus af te breken: res-pectievelijk, om van de leerlingen te zwijgen. De heer Macalester Loup heeft de Stereometrie van Dr. Molenbroek blijkbaar niet opgeslagen; daarin zou hij vinden het woord *blok*.

Zoo het eenigszins mogelijk is, moeten wij Nederlandsch schrijven, niet alleen voor ons, maar voor onze kinderen, voor onze schooljeugd, voor onze stamverwanten in Vlaanderen, in Zuid-Afrika en voor de bewoners van onze overzeesche gewesten; Zuid-Afrika geeft het voorbeeld; Prof. Arndt heeft met zijn „lysie" uitstekend werk gedaan, niet alleen om de vertaling van de Engelsche woorden maar mede om die van vele andere. Het werkje zal aan de „Kaap" van groot nut zijn. „Wiskundige onderwys deur middel van Afrikaans als voertaal neem geweldig toe", volgens zijn schrijven van 3 Dec. 1924 aan den Heer Noordhoff.

W.